

Doktoranto ataskaita už ketvirtus doktorantūros metus ir doktorantūros laikotarpį

Doktorantas: j.asist Linas Petkevičius
Vadovas: prof. dr. Romas Baronas

Informatikos institutas
Vilniaus Universitetas

Informatikos krypties ataskaitinė konferencija,
Vilnius, 2019-10-30

- Formalieji reikalavimai:
 - Egzaminai
 - Straipsniai
 - Konferencijos
 - Doktorantų mokyklos/dirbtuvės
 - Disertacija
- Doktorantūros rezultatų pristatymas:
 - Tyrimo tikslas ir uždaviniai
 - Mokslinis naujumas
 - Doktorantūros rezultatai
 - Išvados

Doktorantūros egzaminai

Egzaminai **išlaikyti** per pirmuosius dvejus doktorantūros metus.

Dalykas	Kreditai	Laik. data	Komisija	Įvert.
Lygiagretieji ir paskirstyti skaičiavimai	9	2017m. rugsėjis	prof. dr. J. Žilinskas prof. habil. dr. G. Dzemyda dr. Viktor Medvedev	9
Matematinės fizikos lygtys	7	2016m. vasaris	prof. habil. dr. F. Ivanauskas doc. dr. A. Ambrazevičius prof. dr. R. Baronas	9
Skaitiniai metodai	9	2016m. birželis	prof. habil. dr. F. Ivanauskas doc. dr. P. Katauskis prof. dr. R. Baronas	8
Globaliojo optimizavimo metodai	7	2016m. rugsėjis	prof. habil. dr. A. Žilinskas prof. habil. dr. G. Dzemyda prof. dr. J. Žilinskas	8

- A1 R. Baronas, J. Kulys, and **L. Petkevičius**. *Computational modeling of batch stirred tank reactor based on spherical catalyst particles*. J. Math. Chem., 57(1):327–342, 2019.
- A2 R. Baronas, J. Kulys, and **L. Petkevičius**. *Modelling the enzyme catalysed substrate conversion in a microbioreactor acting in continuous flow mode*. Nonlinear Anal. Model. Control, 23(3):437–456, 2018.
- A3 A. Žilinskas, R. Baronas, L. Litvinas, and **L. Petkevičius**. *Multi-objective optimization and decision visualization of batch stirred tank reactor based on spherical catalyst particles*. Nonlinear Anal. Model. Control, 24(6), 2019. (priimtas)
- A4 R. Baronas, J. Kulys, and **L. Petkevičius**. *Modeling carbohydrates oxidation by oxygen catalyzed by bienzyme glucose dehydrogenase/laccase system immobilized into microreactor with carbon nanotubes*. J. Math. Chem., 2019. (recenzuojamas)

- A5 L. Petkevičius** and R. Baronas. *Modeling and simulation of enzyme-catalysed substrate conversion in a microbioreactor.* International Journal on Advances in Systems and Measurements, 11(1 & 2):173–182, 2018.

Straipsniai (konferencijos darbuose)

- A6 **L. Petkevičius** and R. Baronas. *Numerical simulation and analysis of enzyme-catalysed substrate conversion in a microbioreactor*. In SIMUL 2017: The Ninth International Conference on Advances in System Simulation, pages 8–12, 2017.
- A7 **L. Petkevičius** and R. Baronas. *Numerical analysis of the dynamics of reactant conversion in batch stirred tank reactor*. In 2018 IEEE 6th Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering (AIEEE), pages 1–6. IEEE, 2018.
- A8 **L. Petkevičius** and R. Baronas. *Modeling and simulation of porous multi layer microbioreactors*. In 33rd International Conference on Modelling and Simulation (ECMS 2019), page 190-196. SCS-Europe, 2019.
- A9 **L. Petkevičius**. *Applying homotopy perturbation method to non-linear differential equations*. In 33rd annual European Simulation and Modelling Conference (ESM 2019). Eurosis, 2019. (priimtas)

Konferencijos

- 1 ECMS 2019 (Kazerta, Italija): *32th European Conference on Modelling and Simulation*. 2019 Birželio 10-14d.
- 2 DAMSS 2018 (Druskininkai, Lietuva): *Data analysis methods for software systems*. December 2018 Gruodžio 1.
- 3 AIEEE 2018 (Vilnius, Lietuva): *6th IEEE Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering*. 2018 Lapkričio 8-12d.
- 4 NESUS 2018 (Zagrebas, Kroatija) *3rd NESUS Winter School and PhD Symposium*. 2018 Sausio 22-25d. (COST Action IC1305)
- 5 SIMUL 2017 (Atėnai, Graikija): *The Ninth International Conference on Advances in System Simulation*. 2017 spalio 8-12d.
- 6 LMD 2017 (Vilnius, Lietuva): *Lithuanian Mathematical Society 58th Conference*, 2017 birželio 21-22d.
- 7 OR 2017 (Vilnius, Lietuva): *Open Readings*. 2017 Kovo 14-17d.
- 8 DAMSS 2016 (Druskininkai, Lietuva): *Data analysis methods for software systems*. 2016 Gruodžio 1-3d.

- 1 NESUS 2018 (Zagreb, Kroatija) *3rd NESUS Winter School and PhD Symposium*. 2018 Sausio 22-25d. (COST Action IC1305)
- 2 OpenMultiMed 2018 (Erlangen, Vokietija) *TS3:OpenMultiMed Training School: Multi-scale and multi-level modelling methodologies in Biomedicine*. 2018 Vasario 21-23d. (COST Action CA15120)
- 3 E-MINDS 2018 *3rd Training School, Numerical simulations in electrochemistry*. 2018 Kovo 26-30d. (COST Action MP1407)
- 4 ESGI 2018 (Palanga, Lietuva) *Workshop of Mathematical Solutions in Business and Industry*. 2018 Birželio 10-14.

- 1 Disertacijos rankraštis pateiktas doktorantūros komitetui elektroniniu formatu

Kamieninio padalinio išvada:

Rugsėjo 25d seminaro vykusio Informatikos institute išvada:
rekomenduoti atestuoti už ketvirtus doktorantūros metus

Disertacijos pavadinimas:

Skaitinis ir simbolinis reakcijos ir difuzijos procesų
bioreaktoriuose modeliavimas

Numerical and symbolic modeling of reaction-diffusion processes in
bioreactors

Nagrinėjami skaitiniai ir simboliniai algoritmai sistemoms, kurios yra modeliuojamos diferencialinėmis lygtimis

Tyrimo tikslas ir uždaviniai

Šio darbo tikslas yra sukurti skaitinius ir simbolinius algoritmus bei jų realizacijas, leidžiančias modeliuoti ir tirti bioreaktorių sistemas, pagrįstas mikrореaktorių dalelėmis.

- Apibendrinti esamus matematinius bioreaktorių modelius
- Apibendinti egzistuojančių matematinių modelių veikimą
- Sukurti mikrореaktorių su anglies nanovamzdeliais matematinį ir kompiuterinį modelį
- Ištirti homotopijos perturbacijos metodą apytiksliams analitiniais sprendimams rasti, įvertinti tinkamumą dviejų sluoksnių biokatalizės sistemose.
- Sukurti kompiuterinį modelį bioreaktoriaus, pagrįsto mikrореaktoriais, daugiakriteriniui optimizavimui.
- Išanalizuoti atviras ir uždaras bioreaktorių sistemas, naudojantis pasiūlytus matematinius ir kompiuterinius modelius.

- Atlikti tyrimai pateikia sprendimus kurti efektyvesnius mikroreaktorius projektavimo stadijoje.
- Analitinių aproksimacijų analizė pateikia rekomendacijas, kada ir kaip taikyti homotopijos perturbacijos metodą.
- Disertacijos rezultatai buvo panaudoti siekiant įgyvendinti projekto "Kompiuterinis atvirų biologinių sistemų modeliavimas: augančios bakterijos ir mikroreaktoriai" tikslus, projektas Nr. S-MIP-17-98, kurį finansuoja Lietuvos mokslo taryba.

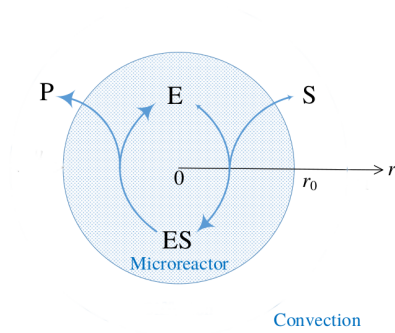
Rezultatai, mokslinis naujumas

- Apibrendrintas žinomas matematinis bioreaktorių modelis papildant modelį sluoksniais, trūkiais kraštinėmis, bei skirtingomis pradinėmis sąlygomis.
- Pademonstruota, jog uždaros sistemos veikimo efektyvumas tampa ekvivalentus atviros sistemos efektyvumui prie didelio laiko.
- Pasiūlytas mikrobioreaktoriaus su anglies nanovamzdeliais matematinis modelis.
- Pademonstruoti homotopijos perturbacijos metodo veikimo trūkumai, buvo pateiktos taikymo rekomendacijos.
- Sudarytas kompiuterinis modelis daugiakriteriniui bioreaktoriaus optimizavimui.
- Nustatytos parametrų reikšmės, su kuriomis pasiekiamas reikšmingai didesnis sistemos trumpalaikis efektyvumas.

- Pasiūlytas trijų sluoksnių matematinis modelis gali būti sėkmingai taikomas modeliuoti mikrobioreaktoriaus su anglies nanovamzdeliais kinetikai.
- Uždaros sistemos veikimo efektyvumas tampa ekvivalentus atviros sistemos efektyvumui prie didelio laiko.
- Analitinės aproksimacijos gautos homotopijos perturbacijos metodu yra validžios tik jei metodo mažas parametras patenka į konvergavimo sritį. Todėl skirtingoms bioreaktorių konfigūracijoms, reikalingas skirtingas pradinis lygties ištiesinimas.

Bioreaktoriaus modelis

Literatūroje žinomas sferinio bioreaktoriaus modelis



Bioreaktoriaus modelis

$$\frac{\partial s}{\partial t} = D\Delta s + \frac{V_{max}s}{K_M + s}$$

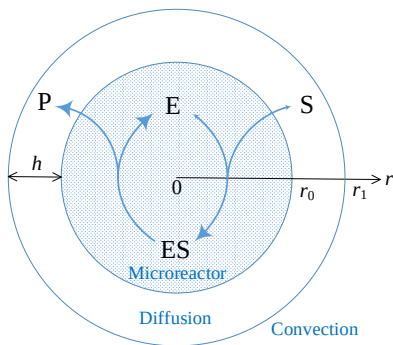
$$\left. \frac{\partial s(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$s(r, 0) = 0, \quad 0 < r < r_0$$

$$s(r_0, t) = s_0$$

čia D - difuzijos koeficientas, Δ - Laplaso operatorius sferinėse koordinatėse, s_0 - pradinė koncentracija.

Matematinio modelio apibendrinimas



Bioreaktoriaus su Nernsto sluoksniais modelis

Modelis publikuotas straipsnyje [A2].

$$\frac{\partial s_m}{\partial t} = D_m \Delta s_m + \frac{V_{max} s_m}{K_M + s_m}$$

$$\frac{\partial s_d}{\partial t} = D_d \Delta s_d$$

$$\left. \frac{\partial s_m(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial s_m(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial s_d(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0}$$

$$s_m(r_0, t) = \phi s_d(r_0, t)$$

$$s_m(r, 0) = s_d = 0, \quad 0 < r < r_1$$

$$s_d(r_1, t) = s_0$$

Analitiniai sprendiniai

Išvesti apibendrinti sprendiniai ribiniais atvejais, kai nagrinėjama sistema turi papildomą sluoksnį, bei trūkį kraštinėse sąlygose, ir kurie susiveda į žinomus sprendinius, kai papildomas sluoksnis nenagrinėjamas. Ribinis atvejis kai $s_0 \ll k_M$:

$$s_{m,s}(r) = \frac{\phi s_0}{r} \times \frac{\beta r_0 \sinh(\sigma r / r_0)}{\beta \sinh \sigma + \phi(\sigma \cosh \sigma - \sinh \sigma)}, \quad 0 \leq r \leq r_0$$

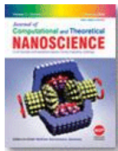
$$s_{d,s}(r) = \frac{s_0 r_1}{r} \times \frac{\theta r \sinh \sigma + \phi(r - r_0)(\sigma \cosh \sigma - \sinh \sigma)}{\theta r_1 \sinh \sigma + \phi(r_1 - r_0)(\sigma \cosh \sigma - \sinh \sigma)}, \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Ribinis atvejis kai $s_0 \gg k_M$:

$$s_{m,s}(r) = \phi s_0 - \frac{v_{\max}}{6d_m} \left(r_0^2 - r^2 + \frac{2\phi r_0^2}{\beta} \right), \quad 0 \leq r \leq r_0,$$

$$s_{d,s}(r) = s_0 - \frac{v_{\max} r_0^3}{3d_d} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right), \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Rezultatai publikuoti straipsnyje [A2].



Application of New Homotopy Perturbation Method for Solving Partial Differential Equations

Buy At
\$106.2
(Refund)

ADD TO

BUY N

Authors
Source:



Computers & Mathematics with Applications

Volume 62, Issue 1, July 2011, Pages 225-234



A new homotopy perturbation method for solving systems of partial differential equations

[Bioprocess and Biosystems Engineering](#)

February 2018, Volume 41, [Issue 2](#), pp 281-294 | [Cite as](#)

Unprecedented homotopy perturbation method for solving nonlinear equations in the enzymatic reaction of glucose in a spherical matrix

Rezultatas: Gražinama k -tosios eilės aproksimacija

$$U = U_0 + U_1 + \dots + U_k$$

Inicializacija:

Parenkamas mažo parametro įvedimas (pradinė tiesinė lygtis);

 Randame pradinį artinį $U_0(r)$;

$i = 1$;

nuo $i \leq k$ **daryti**

 Surenkame narius prie $i-1$ mažo parametro laipsnių;

 Sprendžiame lygtį įstatę $U_{i-1}(r)$ sprendinį;

 Gauname artinį $U_i(r)$;

pabaiga

Algoritmas 1: Simbolinis analitinių sprendinių radimas taikant HPM

Analitinės aproksimacijos

Taikant homotopijos perturbacijos metodą rastos analitinės aproksimacijos:

$$\begin{aligned} s_{m,s}(r) &\approx s_{m,H}(r) = s_0\phi - \frac{P\sigma^2\phi s_0}{2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{2\phi}{\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3P^2\sigma^2}{20} \left(8\frac{\phi}{\beta} \left(1 + 5\frac{\phi}{\beta} \right) - 3 \left(1 - \frac{r^4}{r_0^4} \right) + 10 \left(1 + 2\frac{\phi}{\beta} \right) \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right) \right), \\ s_{d,s}(r) &\approx s_{d,H}(r) = s_0 - \frac{P\sigma^2\phi s_0 r_0}{\theta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \left(1 + \frac{3P^2\sigma^2}{5} \left(1 + 5\frac{\phi}{\beta} \right) \right), \end{aligned}$$

kur $P = k_M / (3(\phi s_0 + k_M)) = 1 / (3(\phi S_0 + 1))$.

Rezultatai publikuoti straipsnyje [A2].

Analitinės aproksimacijos (2)

Pademonstruoti analitinių aproksimacijų trūkumai

Koncentracijos reikšmės skaičiuojant baigtiniais skirtumais, bei HPM metodu

$\tilde{S}_0$	β	σ^2	$\tilde{S}_{FD}(0)$	$\tilde{S}_{M1,2}(0)$	$e(0)$	$\tilde{S}_{FD}(1)$	$\tilde{S}_{M1,2}(1)$	$e(1)$
10	10	0.1	4.99	4.98	0.13	5.00	5.00	0.02
0.1	10	0.1	0.05	0.05	0.72	0.05	0.05	0.10
10	0.1	0.1	4.94	4.85	1.85	4.95	4.86	1.74
0.1	0.1	0.1	0.05	0.04	8.75	0.05	0.04	8.22
1	1	1	0.45	0.40	10.41	0.48	0.45	6.21
10	10	10	4.13	3.53	14.56	4.95	4.86	1.70
0.1	10	10	0.02	0.06	223	0.05	0.05	0.65
10	0.1	10	0.95	-2.90	406	1.48	-2.20	248
0.1	0.1	10	0.00	12.94	366162	0.01	11.73	136349

kur $e(\tilde{\rho}) = \frac{|S_{FD}(\tilde{\rho}) - S_{M1}(\tilde{\rho})|}{S_{FD}(\tilde{\rho})} \times 100\%$ - procentinė paklaida.

Rezultatai publikuoti straipsnyje [A2].

Analitinės aproksimacijos (3)

Atliktas homotopijos perturbacijų metodo tyrimas, įvertintas analitinių aproksimacijų tikslumas nagrinėjant skirtingą mažo parametro įvedimą.

$$\left(\tilde{S}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{S}'(\tilde{r})\right) - \varepsilon \frac{\sigma^2 \tilde{S}(\tilde{r})}{1 + \tilde{S}(\tilde{r})} = 0 \quad (\text{M1})$$

$$\left(\tilde{S}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{S}'(\tilde{r})\right) (1 + \tilde{S}(\tilde{r})) - \varepsilon \sigma^2 \tilde{S}(\tilde{r}) = 0 \quad (\text{M2})$$

$$\tilde{S}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{S}'(\tilde{r}) - \sigma^2 \tilde{S}(\tilde{r}) + \tilde{S}^\varepsilon(\tilde{r}) \left(\tilde{S}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{S}'(\tilde{r})\right) = 0 \quad (\text{M3})$$

$$\left(\tilde{S}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{S}'(\tilde{r})\right) - \sigma^2 + \varepsilon \frac{\sigma^2}{1 + \tilde{S}(\tilde{r})} = 0 \quad (\text{M4})$$

$$\left(\tilde{S}''(\tilde{r}) + \frac{2}{\tilde{r}}\tilde{S}'(\tilde{r})\right) (1 + \varepsilon \tilde{S}(\tilde{r})) - \sigma^2 \tilde{S}(\tilde{r}) = 0 \quad (\text{M5})$$

Tyrimas pateiktas straipsnyje [A9].

Analitinės aproksimacijos (3)

Rastos geriausios aproksimacijos prie skirtingų parametrų reikšmių

Bendros analitinių aproksimacijų paklaidos

	0-order	1-order	2-order
M1	$3.7 \cdot 10^4$	$3.8 \cdot 10^3$	$8.12 \cdot 10^2$
M2	$3.7 \cdot 10^4$	$3.8 \cdot 10^3$	-
M3	$3.2 \cdot 10^5$	-	-.
M4	$3.3 \cdot 10^3$	$8.8 \cdot 10^5$	-
M5	$2.24 \cdot 10^2$	-	-
M6	$7.9 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^4$	$2.7 \cdot 10^2$

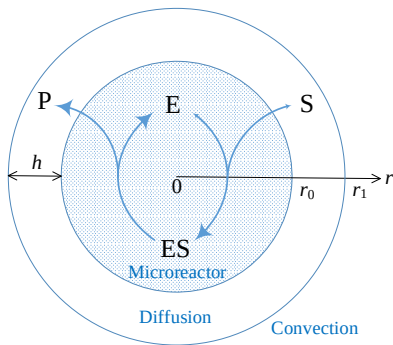
kur

$$\mathcal{E}_T = \int_0^{\tilde{S}_{0,v}} \int_0^{\phi_v} \int_0^{\tilde{\nu}_v} \int_0^{\gamma_v} \int_0^{\sigma_v^2} \mathcal{E} d\tilde{\nu} d\gamma d\sigma^2 d\phi d\tilde{S}_0.$$

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \left(D^*(\tilde{r}) \Delta \tilde{S}^*(\tilde{r}) - a^*(\tilde{r}) \frac{\sigma^2 \tilde{S}^*(\tilde{r})}{1 + \tilde{S}^*(\tilde{r})} \right)^2 dr. \quad (1)$$

Bioreaktorio modelio veikimo apibendrinimas

Nagrinėjama uždara bioreaktoriaus sistema



Bioreaktoriaus su Nernsto sluoksniu modelis

Modelis publikuotas straipsnyje [A1].

$$\frac{\partial s_m}{\partial t} = D_m \Delta s_m + \frac{V_{max} s_m}{K_M + s_m}$$

$$\frac{\partial s_d}{\partial t} = D_d \Delta s_d$$

$$\left. \frac{\partial s_m(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial s_m(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial s_d(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0}$$

$$s_m(r_0, t) = \phi s_d(r_0, t)$$

$$s_m(r, 0) = s_d = 0, \quad 0 < r < r_1$$

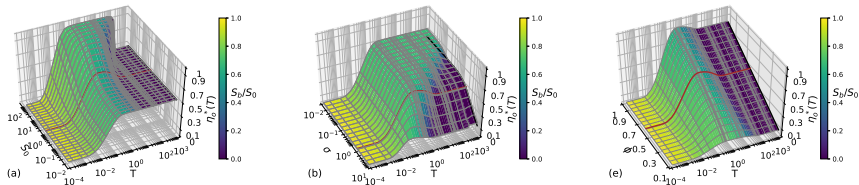
$$\frac{ds_b}{dt} = -\frac{1}{q} D_d \left. \frac{\partial s_d}{\partial r} \right|_{r=r_1}, \quad t > 0,$$

Bioreaktorio modelio veikimo apibendrinimas

Straipsnyje [A2] turint analitinius sprendinius rastos analitinės atviros sistemos bioreaktoriaus efektyvumo charakteristikos pvz: trumpalaikis efektyvumas

$$\eta = \frac{3\beta\phi(\sigma \coth \sigma - 1)}{\sigma^2(\beta + \phi(\sigma \coth \sigma - 1))},$$

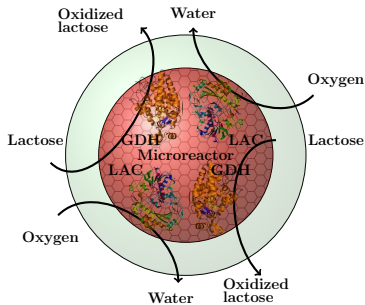
Tyrimas parodė jog uždaros sistemos efektyvumas tampa ekvivalentus atviros sistemos efektyvumui prie didelio laiko.



Trumpalaikis bioreaktoriaus efektyvumo priklausomybė nuo sistemos parametru

Rezultatai publikuoti straipsnyje [A1].

Pasiūlytas matematinis mikrobioreaktoriaus su anglies nanovamzdeliais modelis

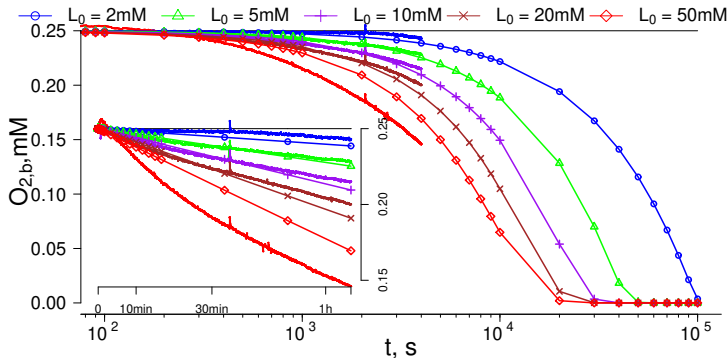


Mikrobioreaktorius su anglies nanovamzdeliais

Modelis suformuluotas straipsnyje [A4].

Pasiūlyto modelio palyginimas su eksperimentais

Modeliavimas rodo, jog pasiūlytas modelis gali būti sėkmingai taikomas sudėtingų, elektronų surišimu pagrįstų cheminių reakcijų, modeliavimui.



Degunies koncentracija laike: eksperimentiniai ir modeliavimo duomenys

Rezultatai pateikti straipsnyje [A4].

Modelis daugiakriteriniui optimizavimui

Suformuluota daugiakriterijo optimizavimo problema.

$$\min_{x \in A} F(x), \quad F(x) = (f_1(x), -f_2(x), f_3(x))^T,$$

$$f_1(x) = \lg \varphi_1(x)$$

$$f_2(x) = \lg \varphi_3(x) = \lg 0.9 + x_3 + \lg(10^{3x_4} - (10^{x_1} + h_1)^3) - 3x_4$$

$$f_3(x) = \lg \varphi_3(x) = x_2 + 3x_1 - 3x_4$$

kur

$$\begin{aligned} \varphi_1(r_0, e_0, s_0, r_2) &= t_{0.9} = \{t : s_b(t) = 0.1s_0\} \\ \varphi_2(r_0, s_0, r_2) &= 0.9s_0 \frac{r_2^3 - (r_0 + h_1)^3}{r_2^3} \\ \varphi_3(r_0, r_0, r_2) &= \frac{e_0 r_0^3}{r_2^3} \end{aligned} \quad (2)$$

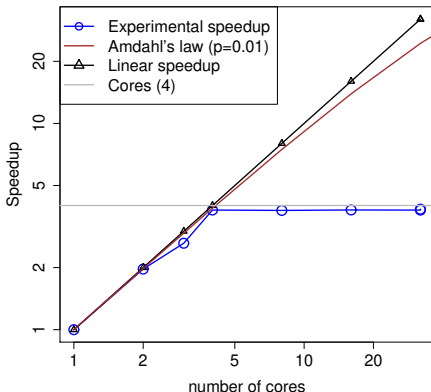
Formuluotė panaudota sprendžiant daugiakriterinį optimizavimą [A3].

Disertacijoje pateikti rezultatai iš papildomų tyrimų:

- Medžiamų aktyumo ir vingiuotumo įtakos tyrimas, rezultatai publikuoti [A5],[A6]
- Skirtingų pradinių sąlygų įtaka maksimaliam efektyvumui, bei reakcijų greičiams tyrimas, rezultatai publikuoti [A7]
- Keturių sluoksnių mikroreaktoriaus modelio tyrimas, rezultatai publikuoti [A8]

Skaičiavimų lygiagretinimas

Disertacijoje atlikta daugiau nei milijonas reakcijų simuliacijų.
Lygiagretinimas atliktas taikant R kalbos API, kviečiant c++ kalba realizuotus algoritmus.



Bendrosios išvados

- Pasiūlytas naujas mikroreaktorius su anglies nanovamzdelių matematinis modelis ir jo realizacija apjungiantis kelias chemines reakcijas įsigalinančias per laisvųjų elektronų pernašą, pademonstruota jog modelis yra tinkamas modeliuoti bioreaktoriaus kinetiką.
- Uždaros sistemos veikimo trumpalaikis efektyvumas tampa ekvivalentus atviros sistemos trumpalaikiui efektyvumui prie didelio laiko.
- Išvestos analitinės aproksimacijos homotopijos metodu yra validžios tik prie nedidelios fiksuotų sistemos hiperparametrų aibės. Fiksavus parametrus galima gauti aproksimacijas su paklaida mažesne nei $< 10^{-10}$, kuri praktikoje yra laikoma tinkama. Analitinė aproksimacija gauta HPM yra validi jei mažas homotopijos parametras patenka į konvergavimo sritį. Norint pasiekti norimą tikslumą skirtingiems sistemos parametrams reikalingos skirtingas netiesinės dalies pradinis ištiesinimas.

Klausimai