Vilniaus universitetas
Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas
L I E T U V A

INFORMATIKA (N009)

ERDVĖS-LAIKO DUOMENŲ KLASIFIKAVIMAS NAUDOJANT DISKRIMINANTINES FUNKCIJAS

Marta Karaliutė

2019 m. spalis

Mokslinė ataskaita DMSTI-DS-N009-19-13

VU Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Akademijos g. 4,
Vilnius LT-08412
www.mii.lt

Santrauka

Šiame darbe apžvelgiami statistiniai erdvės-laiko modeliai ir nagrinėjami erdvės-laiko duomenų kontekstinio (su apmokymu) klasifikavimo, naudojant diskriminantines funkcijas, uždaviniai. Pateikiamos klasifikavimo klaidos tikimybių ir aktualių klaidų formulės, naudojant diskriminantines funkcijas, pagristos marginaliniais ir sąlyginiais klasifikuojamo stebinio skirstiniais. Šios formulės taikomos atliekant skaičiavimus tiek su dirbtiniais, tiek su realiais duomenimis.

Anksčiau nebuvo intensyviai nagrinėjamos erdvės-laiko Gauso duomenų diskriminantinės analizės uždaviniai. Paprastai analizės rezultatai buvo gaunami tam tikrais erdvinių duomenų modelių atvejais ir (arba) darant prielaidą, kad statistinis nepriklausomumas yra tarp klasifikuojamo stebėjimo ir mokomosios imties.

Sukurtas originalus metodas Gauso atsitiktinio lauko (ang. Gaussian random field (GRF)) stebėjimo klasifikavimui į vieną iš dviejų populiacijų, apibūdinamų skirtingais regresijos parametrais ir atskiriama kovariacijos funkcija. Nagrinėta klasifikavimo taisyklė yra pagrįsta Bajeso diskriminantine funkcija (BDF) su pakeistais regresijos parametrais ir laiko kovariacija pagal jų įverčius, atsižvelgiant į mokymo imtį. Siūlomas sferinis izotropinis ir Markovo erdvinių kovariacijų modelis, o laiko kovariacija apskaičiuojama pagal Yule-Walker lygtis (darant prielaidą, kad AR(p) modeliai) arba momentų (empirinių įverčių) metodu. Pasirinktas leave-one-out metodas. Pateikiant realius duomenis apie nedarbo lygį Lietuvoje, lyginami erdvės-laiko kovariacijos modelių klasifikatorių rodikliai. Pateiktas kritinis šių modelių palyginimas.

Reikšminiai žodžiai: erdvinė koreliacija, krigingas, klasifikavimo klaidos tikimybė, diskriminantinė funkcija.

Turinys

1 Įvadas

Norint spręsti statistinius uždavinius pirmiausia reikia surinkti duomenis. Dažnai erdvinių duomenų rinkiniai yra gana nedideli, o taškai, kuriuose atliekami stebėjimai, pasklidę netaisyklingai. Renkant duomenis tam tikrą laiko periodą (paprastai vienodais laiko intervalais), jų gali būti net ir labai daug. Pavyzdžiui, atliekant oro užterštumo tyrimus, monitoringo sistemą gali sudaryti mažiau nei šimtas taškų, tačiau kiekviename taške duomenys renkami kas valandą. Sprendžiant „erdvinį“ uždavinį, paprastai siekiama interpoliuoti arba įvertinti erdvinį vidurkį. Duomenys, rinkti tam tikrą laiko tarpą, dažniausiai naudojami ateities reikšmėms prognozuoti arba sezoniškumams tirti. Tuo tarpu erdvės-laiko uždaviniai jungia abu uždavinių tipus. Vienas iš akivaizdžių sprendimo būdų yra analizuoti erdvėje rinktus duomenis kiekvienu atskiru laiko momentu, t. y. ignoruoti reiškinio kitimą laike. Kita vertus, galima dirbti su laiko eilutėmis skirtinguose taškuose (daugiamatės laiko eilutės). Tačiau tada negalėtume modeliuoti, prognozuoti ar įvertinti reikšmių taškuose, nesančiuose imtyje. Bendru atveju reikia atsižvelgti į koreliacijas ir erdvėje, ir laike bei nustatyti ryšius tarp jų. (Dučinskas, Šaltytė-Benth 2003). Klasifikuojant stebėjimus svarbu įvertinti, kaip tiksliai tai atliekama. Dažnai taikomos tokios charakteristikos, kaip bendras klasifikavimo tikslumas bei klaidingo klasifikavimo tikimybių įverčiai. Klasifikavimo kokybę nusako klaidingo klasifikavimo tikimybių įverčiai, kurie parodo, kokia yra tikimybė suklysti klasifikavimo metu kiekvienai iš klasių (Čekanavičius ir Murauskas 2008).

Yra žinoma, kad visiškai nurodytoms populiacijoms optimali klasifikavimo taisyklė, atsižvelgiant į mažiausią klasifikavimo klaidos tikimybę, yra BDF klasifikavimo taisyklė. Tačiau praktikoje kai kurie ar visi statistiniai populiacijų parametrai nėra žinomi.

Daugelis autorių tyria įterptąją BDF versiją, kai parametrai buvo įvertinti remiantis mokymo imtimi su nepriklausomais stebėjimais arba mokymo imtimi, kai stebėjimai priklauso nuo laiko (Lawoko ir McLachlan, 1985; McLachlan, 2004).

Trečiame skyriuje nagrinėjami Gausinių erdvės-laiko duomenų klasifikavimo metodai, naudojant įvairią erdvinę informaciją (geometrinę ir statistinę). Klasifikatorių vertinimui naudojamas leave-one-out metodas (Ikechukwu, 2016). Pritaikomi sferinis izotropinis (Matern, 1986, 3.2 skyrius) ir Markovo modeliai (Oliveira ir Ferreira, 2011;

Dreiziene ir kt., 2018) erdvinei kovariacijai įvertinti. Laiko kovariacija apskaičiuojama pagal Yule-Walker lygtis AR(2) modeliui ir momentų metodą.

Ketvirtajame skyriuje pateiktas pritaikymas įvairiems nedarbo lygio Lietuvoje erdvės-laiko modeliams, o išvados pateikiamos paskutiniame skyriuje.

2 Erdvės ir laiko modeliai

Erdvės-laiko modelis paprastai užrašomas taip:

$$\{Z(s;t): s \in D, t \in T\},$$

kur s – erdvės, o t – laiko koordinatės, $D \subset \mathbb{R}^d$ yra erdvinių indeksų aibė.

Bendras erdvės-laiko duomenų modelis gali būti užrašytas tokia forma:

$$Z(s;t) = \mu(s;t) + \varepsilon(s;t),\ s \in D, t \in T, \quad (1)$$

čia $\mu(s;t)$ yra vidurkio funkcija; $\varepsilon(s;t)$ – nulinio vidurkio atsitiktinis laukas.

Apibrėžimas. $K(s,t;u,r)$ yra vadinama stacionaria erdvės-laiko kovariacine funkcija, jeigu $K(s,t;u,r) = C(s-u;t-r)$, kur $s,u \in \mathbb{R}^d$, $t,r \in \mathbb{R}$, $C(\cdot,\cdot)$ – bet kokia funkcija, tenkinanti atitinkamas kovariacinės funkcijos savybes.

Jeigu atsitiktinis procesas $Z(s;t)$ turi pastovų vidurkį μ ir stacionarią kovariacinę funkciją $C(h;\tau)$, jis yra vadinamas antros eilės (arba silpnai) stacionariu. Stiprus $Z(s;t)$ stacionarumas reikalauja, kad visos tikimybinės atsitiktinių procesų $Z(s;t)$ ir $Z(s+h;t+\tau)$ charakteristikos, visiems $h \in \mathbb{R}^d$ ir $\tau \in \mathbb{R}$, sutaptų.

Remiantis erdvės-laiko kovariacinės funkcijos išraiška, stacionari erdvės-laiko koreliacinė funkcija užrašoma:

$R(h;\tau) \equiv \frac{C(h;\tau)}{C(0;0)}$, $h \in \mathbb{R}^d$ ir $\tau \in \mathbb{R}$.

Erdviniams duomenims modelis parenkamas iš žinomų parametrinių modelių rinkinio. Yra du būdai, kaip tai galima apibendrinti erdvės-laiko duomenims.

Galima sudaryti metriką erdvės-laiko atžvilgiu ir tuomet taikyti izotropinius modelius, t. y. modelius, skirtus erdvinių duomenų analizei. Atstumas tarp dviejų erdvės-laiko taškų $(s_1;t_1)$ ir $(s_2;t_2)$ yra:

$$|(s_1;t_1) - (s_2;t_2)| = |(s_1 - s_2; t_1 - t_2)| =$$

$$= \left(a(x_1 - x_2)^2 + b(y_1 - y_2)^2 + c(t_1 - t_2)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

kur a, b ir c yra teigiami skaičiai, taško $s \in \mathbb{R}^2$ koordinatės yra (x,y) ir t – laikas. Koeficientai a ir b nusako, ar erdvei būdinga geometrinė anizotropija, o koeficientas c

nusako, ar būdinga anizotropija tarp erdvės ir laiko. Iš tikrųjų, atstumas erdvėje ir atstumas laike yra ne tas pats. Erdvei nėra būdingas "sutvarkymas", tačiau laikui yra būdinga tėkmė (praeitis-ateitis). Nėra akivaizdaus erdvės-laiko metrikos (atstumo) parinkimo būdo, nes, tarkime, nėra akivaizdaus tarpusavio ryšio tarp laiko ir erdvės „atstumo" matavimo vienetų. Metrika (2) yra sudaroma tariant, kad erdvė-laikas yra tiesiog aukštesnio matavimo Euklido erdvė.

Kitas būdas yra tam tikra prasme „atskirti" erdvės ir laiko priklausomybę.

Adityvus erdvės-laiko modelis:

$C_{DT}(h_s, h_t) = C_D(h_s) + C_T(h_t)$, kur $C_D(h_s)$, $h_s = s_1 - s_2$, $s_1, s_2 \in D$ ir $C_T(h_t)$, $h_t = |t_1 - t_2|$, $t_1, t_2 \in T$, yra kovariacinės funkcijos, apibrėžtos atitinkamai erdvėje ir laike.

Tačiau šis modelis esant tam tikram taškų išsibarstymui neatitiks kovariacinėms funkcijoms būdingų savybių. Panaši problema gali iškilti ir taikant erdvės-laiko semivariogramos adityvų modelį.

Multiplikatyvus erdvės-laiko modelis (atskiriama (separabili) kovariacinė funkcija):

Dviejų kovariacinių funkcijų sandauga $C_{DT}(h_s, h_t) = C_D(h_s) \cdot C_T(h_t)$ yra erdvės-laiko modelis, atitinkantis kovariacinėms funkcijoms būdingas savybes (Dučinskas, Šaltytė-Benth 2003).

Apibrėžimas. Atsitiktinis procesas $Z(s;t)$ turi separabilią (atskiriamą) erdvės-laiko kovariacinę funkciją, jeigu visiems $s, u \in \mathbb{R}^d$ ir $t, r \in \mathbb{R}$, galima užrašyti:

$$cov\big(Z(s;t), Z(u;r)\big) = C^{(s)}(s,u) \cdot C^{(t)}(t,r), \quad (3)$$

kur $C^{(s)}$ ir $C^{(t)}$ yra atitinkamai erdvės ir laiko kovariacinės funkcijos (Genton 2007, Cressie, Wikle, 2015, 6 skyrius; Crujeiras et al., 2010). Stacionariuoju atveju

$$C_{DT}(h_s, h_t) = C^{(s)}(h_s) \cdot C^{(t)}(h_t) \quad (4)$$

Atsitiktinio proceso $Z(s;t)$ erdvės-laiko semivariograma γ apibrėžiama taip:

$$var\big(Z(s;t) - Z(u;r)\big) \equiv \gamma(s,u;t,r), \quad (5)$$

stacionarumo atveju $2\gamma(h;\tau)$; $h \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Prognozei taške (s_0, t_0) naudojamos tiesinės prognozės (krigingo) metodai. Priklausomai nuo parametrinio apibrėžtumo laipsnio naudojamas paprastas, ordinarus arba universalus krigingas (Cressie 1993, Cressie & Wikle 2015). Universalus krigingas dar buvo nagrinėtas darbe Lesauskienė ir Dučinskas (2003).

3 Erdvės-laiko stebinių kontekstinis (su apmokymu) klasifikavimas

Norime klasifikuoti erdvės-laiko stebėjimus Gauso atsitiktiniame lauke $\{Z(s;t): s \in D \subset \mathbb{R}^2, t \in [0,\infty)\}$, kur s – erdvės, o t – laiko koordinatės.

Stebėjimo $Z(s;t)$ modelis populiacijoje Ω_l yra

$$Z(s;t) = \mu_l(s;t) + \varepsilon(s;t),$$

kur $\mu_l(s;t)$ – determinuotas erdvės-laiko trendas.

Pažymėjus $S_n = \{s_i \in D; i = 1,\dots,n\}$ vietų, kuriose paimti mokymo stebėjimai, galima pavadinti ją mokymo vietų aibe (*ang. set of training locations (STL)*). S_n yra padalintas į dviejų nesusikertančių sąjungų poaibius, t. y. $S_n = S^{(1)} \cup S^{(2)}$, kur $S^{(l)}$ yra S_n poaibis, kuriame ir paimti $Z(\cdot)$ stebėjimai iš Ω_l, $l = 1,2$, $n = n_1 + n_2$. Nagrinėsime tiktai subalansuotus laike stebinius, t. y. $t = 1,\dots,\mathrm{T}$ visiems $s_i \in D$, $i = 0,\dots,n$. Suformuosime T-mačius stebinių vektorius kiekvienam erdvės taškui $Z_i = \big(Z(s_i,1),\dots,Z(s_i,T)\big)'$, $i = 0,\dots,n$.

Tada mokymo imtis bus $n \times T$ matrica $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$, kur $M'_1 = (Z_1,\dots,Z_{n1})$, $M'_2 = (Z_{n1+1},\dots,Z_n)$. Tuomet $Z_i \sim N_T(m_i,\Sigma)$,

kur $m_i = \begin{cases} m_i^{(1)} = (\mu_1(s_i,1) \quad \dots \quad \mu_1(s_i,T))', & i = 1,\dots,n_1 \\ m_i^{(2)} = (\mu_2(s_i,1) \quad \dots \quad \mu_2(s_i,T))', & i = n_1+1,\dots,n \end{cases}$.

O kovariacinės $T \times T$ matricos Σ elementai apibrėžiami tokiu būdu $\sigma_{tr} = C^{(t)}(t,r)$, $t,r = 1,\dots,T$.

Bus nagrinėjamas tiesinis regresinis vidurkio modelis

$\mu_l(s;t) = \beta_l'(t)x(s)$,

kur $x(s) = \big(x_1(s),\dots,x_q(s)\big)'$ – regresorių vektorius, $\beta_l(t)$ – regresijos koeficiento vektorius.

Įveskime pažymėjimus $x(s) = x(s_i)$, $i = 0,\dots,n$ ir $B_l = (\beta_l(1),\dots,\beta_l(T))$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, $X_1 = \big(x_1,\dots,x_{n_1}\big)'$, $X_2 = \big(x_{n_1+1},\dots,x_{n_1}\big)'$ ir $X = X_1 \oplus X_2$.

Tada mokymo imties M modelis yra

$$M = XB + E,$$

kur E yra $n \times T$ atsitiktinių klaidų matrica, kuri turi matricinį normalųjį skirstinį

$$E \sim N_{n\times p}(0, R \otimes \Sigma).$$

Čia $R = \left(r_{ij}; i, j = 1, \dots, n\right)$ – erdvinės koreliacijos matrica tarp stebėjimų STL. AR(p) atveju, Σ yra $T \times T$ Tioplico (Toeplitz) matrica.

Nagrinėjama $Z_0 = \left(Z(s_0, 1), \dots, Z(s_0, T)\right)$ klasifikavimo problema, kai duota mokymo imtis M.

Tarkime kad r_0 – erdvinių koreliacijų vektorius tarp Z_0 ir stebinių aibėje S_n, t. y. $r_0 = (r_{01}, \dots, r_{0n})$.

Tada populiacijoje Ω_l, sąlyginis Z_0 skirstinys, kai duota $M = m$ yra Gauso, t. y.

$$(Z_0|M = m; \Omega_l) \sim N_T(\mu_{lm}^0, \Sigma_{0m}),$$

kur sąlyginis vidurkis μ_{lm}^0 yra

$$\mu_{lm}^0 = E(Z_0|M = m; \Omega_l) = B_l' x_{i0} + \alpha_0'(m - XB)$$

ir sąlyginė kovariacija Σ_{0m} yra

$$\Sigma_{0m} = Var(Z_0|M = m; \Omega_l) = \rho\Sigma$$

ir $\alpha_0 = R^{-1} r_0$, $\rho = 1 - r_0'\alpha_0$.

Priminsime, kad populiacijoje Ω_l, marginalinis skirstinys yra taip pat Gauso,

$(Z_0; \Omega_l) \sim N_T(\mu_l^0, \Sigma_0)$,

kur mardinalinis vidurkis μ_l^0 yra

$$\mu_l^0 = E(Z_0; \Omega_l) = B_l' x_{i0}$$

ir mardinalinė kovariacija Σ_0 yra

$\Sigma_0 = Var(Z_0; \Omega_l) = \Sigma$.

Mahalanobio atstumo kvadratas tarp marginalinių skirstinių taške $s = s_0$ yra

$$\Delta^2 = (\mu_1^0 - \mu_2^0)' \Sigma^{-1} (\mu_1^0 - \mu_2^0),$$

kur $\mu_l = B_l' x_{0l}$, $l = 1, 2$.

o Mahalanobio atstumo kvadratas tarp sąlyginių skirstinių taške $s = s_0$ yra

$$\Delta_0^2 = (\mu_{1m}^0 - \mu_{2m}^0)' \Sigma_{0m}^{-1} (\mu_{1m}^0 - \mu_{2m}^0) = \Delta^2/\rho.$$

Tarkime, kad $H = \left(I_q, I_q\right)$ ir $G = \left(I_q, -I_q\right)$, kur I_q - vienetinė q-eilės matrica.

Tarkime, kad populiacijos apriorinės tikimybės yra žinomos $\pi_1(s)$ ir $\pi_2(s)$, $(\pi_1(s) + \pi_2(s) = 1)$. Tada sąlyginė Bajeso diskriminantinė funkcija (SBDF), minimizuojanti klaidingo klasifikavimo tikimybę, (Duda, Hart, Stork 2000) yra suformuota pagal sąlyginio tankio santykio logaritmą

$$W_m(Z_0) = ln \frac{\pi_1 P_1(Z_0|M)}{\pi_2 P_2(Z_0|M)} = (Z_0 - (m - XB)'\alpha_0 - B'H'x_0/2)' \Sigma^{-1} B'G'x_0/\rho + \gamma \quad (6)$$

kur $\gamma = ln(\pi_1(s_0)/\pi_2(s_0))$.

Apriorinės tikimybės, atsižvelgiančios į erdvinį kontekstą, dažnai skaičiuojamos pagal atvirkštinio atstumo (*ang. inverse distance*) metodą

$\pi_1(s_0) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{d(s_0,s_i)} / \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d(s_0,s_i)}$ ir $\pi_2(s_0) = 1 - \pi_1(s_0)$,

kur $d(\cdot,\cdot)$ - Euklido atstumo funkcija tarp taškų.

Kai $W_m(Z_0) > 0$, taškas s_0 priskiriamas 1 klasei, t. y. $S^{(1)}$ poaibiui, o kai $W_m(Z_0) < 0$, taškas s_0 priskiriamas 2 klasei, t. y. $S^{(2)}$ poaibiui.

Marginalinė Bajeso diskriminantinė funkcija (MBDF)

$$W(Z_0) = ln\frac{\pi_1 P_1(Z_0)}{\pi_2 P_2(Z_0)} = (Z_0 - B'H'x_0/2)'\Sigma^{-1}B'G'x_0 + \gamma. \quad (7)$$

Tada klasifikavimo klaidos tikimybė pagal SBDF lygi

$P_m = \sum_{l=1}^{2} \pi_l \Phi(Q_l)$,

kur $Q_l = -\Delta_0/2 + (-1)^l \gamma/\Delta_0$.

Tada klasifikavimo klaidos tikimybė pagal MBDF lygi

$P = \sum_{l=1}^{2} \pi_l \Phi(Q_l)$,

kur $Q_l = -\Delta/2 + (-1)^l \gamma/\Delta$.

Tačiau praktinėse situacijose dažnai populiacijų parametrai nežinomi. Nagrinėsime atvejį, kai B ir Σ nežinomi, o R žinomas. Naudosimės šių parametrų įvertiniais $\hat{B}$ ir $\hat{\Sigma}$ pagal mokymo imtį M. Pačios funkcijos yra vadinamos įterptosiomis Bajeso diskriminantinėmis funkcijomis (*ang. plug-in Bayesian discriminant function (PBDF)*) (Dučinskas 2009). Toliau naudosimės pažymėjimais $\Psi = (\{B, \Sigma\})$ ir $\widehat{\Psi} = \left(\{\hat{B}, \widehat{\Sigma}\}\right)$.

Išstačius $\widehat{\Psi}$ vietoj Ψ į lygtį (6) gauname įterptinę SBDF, kurią žymėsime PSBDF, (Ducinskas, 2011)

$$W_M(Z_0; \widehat{\Psi}) = \left(Z_0 - \left(M - X\hat{B}\right)'\alpha_0 - \frac{\hat{B}'H'x_0}{2}\right)'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{B}'G'x_0/\rho + \gamma,$$

kur $\hat{B} = (X'R^{-1}X)^{-1}X'R^{-1}Z$.

Tada aktualioji klasifikavimo klaida *(ang. actual error rate (AER))* pagal PSBDF $W_M(Z_0; \widehat{\Psi})$ yra apibrėžiama:

$$P(\widehat{\Psi}) = \sum_{l=1}^{2} \pi_l P\left((-1)^l W_M(Z_0; \widehat{\Psi}) > 0 | M\right).$$

Lema 1. *Aktualioji klaidos tikimybė pagal PBDF yra*

$$P(\widehat{\Psi}) = \sum_{l=1}^{2} \pi_l \Phi(\hat{Q}_l),$$

$kur\ \hat{Q}_l = (-1)^l \frac{\left(x_0'(B_l - H\hat{B}/2) + \alpha_0' X(\Delta\hat{B})\right)\hat{\Sigma}^{-1}\hat{B}\prime G\prime x_0/\rho + \gamma}{\sqrt{x_0' G\hat{B}\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\hat{\Sigma}^{-1}\hat{B}\prime G\prime x_0/\rho}}$, $\Delta\hat{B} = \hat{B}$-B.

Išstačius $\hat{\Psi}$ vietoj Ψ į lygtį (7) gauname įterptinę (*ang. plug-in*) MBDF, kurią žymėsime PMBDF

$$W(Z_0; \hat{\Psi}) = (Z_0 - \hat{B}' H' x_0/2)'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{B}' G' x_0 + \gamma.$$

Tada aktualioji klasifikavimo klaida pagal PMBDF lygi

$$\hat{Q}_l = (-1)^l \frac{x_0'(B_l - H\hat{B}/2)\hat{\Sigma}^{-1}\hat{B}\prime G\prime x_0 + \gamma}{\sqrt{x_0' G\hat{B}\hat{\Sigma}^{-1}\Sigma\hat{\Sigma}^{-1}\hat{B}\prime G\prime x_0}},$$

kur $\Delta\hat{B} = \hat{B} - B$ (Šaltytė-Benth, Dučinskas, 2005).

Tyrime nagrinėjamos šios erdvės-laiko kovariacinės struktūros:

1. remiantis sferiniu semivariogramos modeliu, t. y. $R = (r_{ij})$,

kur $r_{ij} = r(|s_i - s_j|) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\frac{|s_i - s_j|}{\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{|s_i - s_j|}{\lambda}\right)^3, & |s_i - s_j| \le \lambda \\ 0, & |s_i - s_j| > \lambda \end{cases}$, λ – rango parametras;

2. Markovo modeliai, pagrįsti skirtingais parametrais α_R, kurie buvo manomi žinomi, t. y.

$$R = (I - \alpha_R W)^{-1}.$$

Parametras α_R apima erdvinę priklausomybę ($\alpha_R = 0$ reiškia erdvinę nepriklausomybę, o $\alpha_R = 1$ žlunga pagal vidinę sąlyginę autoregresinę specifikaciją).

3. Laiko kovariacijos matrica Σ apskaičiuojama momentų metodu (empirinis įvertis) arba pagal Yule-Walker lygtis AR(2) modeliui.

Išvestos klasifikavimo klaidų tikimybių ir aktualiųjų klasifikavimo klaidų formulės gali būti įvertintos keliais įverčiais.

Nagrinėjamas „Leave-One-Out“ (LO) įvertis, kai visi stebėjimai, išskyrus vieną, naudojami klasifikavimo taisyklei užpildyti, o ši taisyklė naudojama klasifikuoti praleistą stebėjimą (e.g. Ikechukwu, 2016). Ši procedūra kartojama kiekvienam mokymo stebėjimui. LO parodo neteisingų klasifikacijų rodiklį:

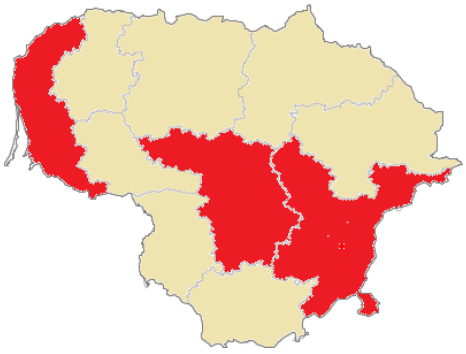
$$\mathrm{LO} = \left(\sum_{i=1}^{n_1} \mathrm{H}\left(-\mathrm{W_M}\left(\mathrm{Z}_i, \hat{\Psi}_{(-i)}\right)\right) + \sum_{i=n_1+1}^{n} \mathrm{H}\left(\mathrm{W_M}\left(\mathrm{Z}_i, \hat{\Psi}_{(-i)}\right)\right)\right)/n,$$

kur $\mathrm{H}(\cdot)$ yra Heaviside funkcija, $\hat{\Psi}_{(-i)}$ - Ψ įvertis iš Z, išskyrus Z_i.

4 Taikymas

Nagrinėjama nedarbo lygio erdvės-laiko duomenų klasifikavimo problema Lietuvoje. Nedarbo lygis yra rodiklis, išreikštas bedarbių ir darbo jėgos santykiu. Tai plačiai pripažįstama kaip pagrindinis darbo rinkos veiklos rodiklis. Nedarbo lygis ir jo analizė iš skirtingų perspektyvų yra labai aktuali kiekvienos šalies tema, nes kai darbuotojai yra bedarbiai, jų šeimos netenka darbo užmokesčio, o visa tauta praranda savo indėlį į prekių ar paslaugų, kurios galėjo būti pagamintos, ekonomiką. Bedarbiai taip pat praranda perkamąją galią, o tai gali sukelti nedarbą kitiems darbuotojams, sukuriant pakopinį ekonomikos poveikį. Buvo paimti metiniai duomenys nuo 1996 iki 2018 metų 10-yje Lietuvos apskričių, iš Lietuvos statistikos departamento svetainės: stat.gov.lt.

Apskritys yra suskirstytos į dvi klases: 1-osios klasės Vilniaus, Kauno ir Klaipėdos apskritys, kur nedarbo lygis yra žemesnis nei Lietuvos vidurkis, ir 2-oje klasėje - visose kitose apskrityse, kuriose nedarbo lygis didesnis nei vidutinis (žr. 1 paveikslą). Taip yra todėl, kad Vilnius, Kaunas ir Klaipėda yra 3 didžiausi miestai, o šiuose miestuose ir atitinkamai apskrityse sukuriama daugiau kaip 60% Lietuvos BVP (bendras vidaus produktas).



1 pav. Lietuvos apskritys: raudona – 1-oji klasė su žemiausiu nedarbo lygiu; geltona - 2-oji klasė su (paprastai) aukštesniu nedarbo lygiu.

Apibendrintiems laiko eilučių duomenims buvo paimtas sferinis semivariogramos modelis, kurio diapazonas yra 50000, o slenkstis - 0,99. Lietuvos geografinės koordinatės yra platuma 55.1694374 ir ilguma 23.8812752, tačiau erdvinei analizei apskričių centrų koordinatės yra paverčiamos LKS koordinatėmis, kurios daro įtaką santykinai dideliam diapazonui.

Pastebime, kad matrica $\hat{\Sigma}^{-1} = (\omega_{ij})$ AR(2) atveju yra reta, t. y. $\omega_{i,i+j} = \omega_{i+j,i} = 0,\ kai\ j = 3, 4, ...$:

$$\hat{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.9 & 0.4 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ -0.9 & 1.9 & -1.5 & 0.4 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0.4 & -1.5 & 2.1 & -1.4 & 0.4 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0.4 & -1.4 & 2.1 & -1.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & -1.4 & 2.1 & -1.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0.4 & -1.4 & 2.1 & -1.4 & 0 \\ ... & ... & ... . & ... & ... & ... & ... & ... \\ .. & ... & ... & 0 & 0.4 & -1.4 & -1.5 & 0.4 \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & -1.5 & 1.9 & -0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.9 & 0.8 \end{pmatrix}$$

1 lentelėje pateikiami apriorinių tikimybių klasifikavimo rezultatai, remiantis atvirkštinio atstumo metodu ir įvairiomis erdvės-laiko kovariacinėmis struktūromis.

1 lentelė. Klasifikavimo rezultatai skirtingoms erdvės ir laiko kovariacinėms struktūroms

			Laiko modeliai					
			Empirinis įvertis			**AR(2) (Yule − Walker)**		
			Klaidingai suklasifikuotos apskritys	LO	Apskritys	Klaidingai suklasifikuotos apskritys	LO	Apskritys
Erdvės modeliai	**Sferinė koreliacija**		3	0.3	V, K, Kl	1	0.1	Kl
	Markovo modeliai	**α_R=0.1**	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=0.2	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=0.3	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=0.4	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=0.5	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=0.6	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=0.7	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=0.8	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=0.9	2	0.2	Kl, U	1	0.1	Kl
		α_R=1.0	6	0.6	K, Kl, A, M, T, U	3	0.3	KL, P, T

Kaip matyti iš 1 lentelės, klasifikatoriai, pagrįsti Yule-Walker įverčiais, turi pranašumą prieš tuos, kurie pagrįsti laiko kovariacijos empiriniais įverčiais; skirtingi erdvinės kovariacijos tipai turi tą patį poveikį klasifikatorių veikimui. Kaip ypatingas atvejis gali būti analizuojamas Markovo modelis su $\alpha_R = 1$, konkrečiu atveju erdvinė matrica R tampa išsigimusia matrica (vidinis SAR modelis) ir sunku tikėtis gerų klasifikavimo rezultatų.

5 Išvados

PBDF buvo įvertintas atsižvelgiant į skirtingas apriorinių tikimybių π_i ir erdvinės koreliacijos reikšmes: remiantis sferiniu semivariogramos modeliu ir Markovo modeliais, skirtingais parametrais α_R, kurie, kaip manoma, buvo žinomi. Pagal gautus rezultatus tinkamesnis klasifikavimo atvejis yra gautas AR(2) modelis. Abiejų erdvinių struktūrų tikslumas yra vienodas: sferinio modelio ir Markovo modelio, išskyrus atvejį, kai Markovo modelyje $\alpha_R = 1$.

Taip pat iš 1 lentelės matyti, kad visais atvejais Klaipėdos apskritis buvo klasifikuojama neteisingai, tai galima paaiškinti ekonomine perspektyva. Kaip minėta, Vilniaus, Kauno ir Klaipėdos apskričių nedarbo lygis paprastai yra žemesnis nei vidutinis, tačiau palyginus šias 3 apskritis galima matyti, kad Klaipėdoje nedarbo lygis yra didesnis nei Vilniaus ir Kauno apskrityse. Taigi Klaipėdą galima laikyti apskritimi tarp aukštesnio ir žemesnio nedarbo lygio.

Mažas LO visiems erdviniams atvejams ir AR(2) laiko kovariacijos modelis rodo, kad siūloma erdvės-laiko diskriminantinė analizė yra gana tiksli.

6 Literatūra

1. Cressie, N., (1993). Statistics for Spatial Data. Wiley & Sons, New York.

2. Cressie, N., Wikle, C. K., 2015, Statistics for spatio-temperal data. John Wiley & Sons.

3. Crujeiras, R. M., Fernandez-Casal, R., and González-Manteiga, W., 2010. Nonparametric test for separability of spatio-temporal processes, Environmetrics, 21, 382-399.

4. Čekanavičius, V., Murauskas, G. 2009. Statistika ir jos taikymai III. Vilnius: TEV.

5. De Oliveira, V., Ferreira, M. A. R., 2011. Maximum likelihood and restricted maximum likelihood estimation for a class of Gaussian Markov random fields. Metrika 74 (2), 167–183.

6. Dreiziene, L., Ducinskas, K., Saltyte-Vaisiauske, L., 2018. Statistical classification of multivariate conditionally autoregressive Gaussian random field observations. Spatial Stat. 28, 216-225.

7. Ducinskas, K., 2011. Error rates in classification of multivariate Gaussian random field observation. Lith. Math. J. 51 (4), 477–485.

8. Dučinskas K. 2009. Approximation of the expected error rate in classification of the Gaussian random field observations. Statistics and Probability Letters, vol. 79, p. 138-144.

9. Dučinskas K., Šaltytė-Benth J. 2003. Erdvinė statistika. Klaipėda: Klaipėdos universiteto leidykla.

10. Duda Richard O., Hart Peter E., Stork David G. 2000. Pattern Classification.

11. Ikechukwu, E., 2016. Evaluation of Error Rate Estimators in Discriminant Analysis with Multivariate Binary Variables. American Journal of Theoretical and Applied Statistics 5 (4), 173-179.

12. Genton M. G. 2007. Separable approximations of space–time covariance matrices. Environmetrics, 18, pp. 681–695.

13. Lawoko, C. R. O., and McLachlan, G. L., 1985. Discrimination with autocorrelated observations. *Pattern Recognition, 18,* 145-149.

14. Lesauskiene E., Dučinskas K. 2003. Universal kriging for spatio-temporal data, Mathematical Modelling and Analysis, 8:4, 283-290.

15. Matern B., 1986. Spatial variation. Second edition. Springer-Verlag, New York.

McLachlan, G.J., 2004. Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition. Wiley, New York.

16. Saltyte-Benth, J., Ducinskas, K., 2005. Linear discriminant analysis of multivariate spatial–temporal regressions. Scand. J. Stat. 32, 281–294.