



Vilniaus universitetas
Duomenų mokslo ir skaitmeninių
technologijų institutas
L I E T U V A



INFORMATIKA (N009)

**STOCHASTINIŲ DINAMINIŲ SISTEMŲ,
STEBIMŲ SU TRIUKŠMU, FILTRAVIMO,
IDENTIFIKAVIMO IR VALDYMO REALIU
LAIKU ALGORITMŲ SUDARYMAS IR
TAIKYMAS**

Vytautas Dulskis

2019 m. spalis

Mokslinė ataskaita DMSTI-DS-N009-19-14

VU Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Akademijos g. 4, Vilnius

LT-08412

www.mii.lt

Santrauka

Šiame darbe yra apžvelgiamos dinaminės sistemos, detaliau akcentuojant tiesines stochastines dinamines sistemas, kadangi būtent jos yra einamojo doktorantūros etapo pagrindinis tyrimo objektas. Atskiru atveju yra nagrinėjamas diskretaus laiko nepriklausomų normaliuju atsitiktinių dydžių sumų proceso, stebimo su triukšmu, modelis, kurio nežinomų triukšmo parametrų vertinimui realiu laiku yra sukonstruojamas rekursyvinis algoritmas, paremtas didžiausio tikėtinumo metodu.

Raktiniai žodžiai: **dinaminės sistemos, Gauso triukšmas, sistemos identifikavimas, rekursyvinis realaus laiko parametrų vertinimo algoritmas, didžiausio tikėtinumo metodas.**

Turinys

1	Ivadas	4
2	Dinaminės sistemos	4
2.1	Tiesinės dinaminės sistemos modelis	6
3	Diskretaus laiko nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių sumų proceso, stebimo su triukšmu, parametru vertinimas realiu laiku	8
4	Išvados	16

1 Įvadas

Stochastinių dinaminių sistemų [5] modeliai yra plačiai naudojami gamtos, inžinerinių bei socialinių procesų modeliavimui. Praktikoje aktualus tokį sistemų filtravimo, identifikavimo ir valdymo uždavinį sprendimas, kai sistema yra stebima su triukšmu. Sistemos filtravimas yra suvokiamas kaip sistemos būsenos nustatymas iš užtriukšmintų sistemos stebėjimų, identifikavimas – kaip jos parametruų įvertinimas, o valdymas – kaip kontroliuojamųjų kintamuųjų nustatymas laike, siekiant mažiausiomis sąnaudomis atlkti norimą užduotį nepaisant sistemos stebėjimo priemones bei pačią sistemą veikiančio triukšmo. Šiu uždavinį sprendimas realiu laiku reiškia momentalų sprendinių atnaujinimą sulig pasirodančia nauja informacija (stebimomis/matuojamomis reikšmėmis).

Įvairios stochastiniai dinaminių modeliai aprašomas inžinerinės sistemos (pavyzdžiui, mechaniniai robotai, judančių objektų stebėjimo įrenginiai) turi reaguoti į aplinkos bei įvairių veiksnių pokyčius, dėl ko nauja sensoriškai gaunama informacija privalo būti apdorojoma ir įvertinama realiu laiku. Šiam tikslui pasiekti reikalingi rekursyviniai algoritmai, leidžiantys sistemą atitinkamai koreguoti tik pagal ankstesnę jos būseną bei naujai gautą informaciją (laikant, kad ši informacija buvo paveikta triukšmo). Nors stochastinių dinaminių sistemų teorija jau yra vystoma daugiau nei pusšimtį metų, žinomi metodai arba nėra pakankamai efektyvūs realaus laiko kontekste, nes turimų stebėjimų aibę skaičiavimuose naudoja pakartotinai, arba remiasi įvairiomis empirinėmis prielaidomis bei euristikomis, kurių adekvatumas dažnai nėra iki galio aiškus. Taip pat didelė dalis metodų (pavyzdžiui, susijusių su gerai žinomu Kalmano filtru [16]) veikia pilkos dėžės principu, t.y. naudojasi kažkokia papildoma informacija, kuri realybėje dažniausiai nėra žinoma. Be to, netgi toks, atrodytu, paprastas uždavinys kaip Vynerio proceso [10], stebimo su triukšmu, filtravimo uždavinys dar nėra galutinai išspręstas. Taigi, egzistuoja poreikis ieškoti fundamentalių rekursyvinių algoritmų, leidžiančių tik iš stebimos informacijos efektyviai identifikuoti ir kontroliuoti sistemą jos evoliucijos eigoje.

Toliau šiame darbe plačiau supažindinama su dinaminėmis sistemomis (antras skyrius) bei konkrečiam stochastinės dinaminės sistemos modeliui sukonstruojamas rekursyvinis nežinomų triukšmo parametru vertinimo algoritmas (trečias skyrius). Galiausiai, ketvirtame skyriuje pateikiama išvados.

2 Dinaminės sistemos

Dinaminė sistema yra laiko evoliucijos būsenų erdvėje taisykli. Dinaminę sistemą sudaro abstrakti fazijų arba būsenų erdvė, kurios koordinatės bet kurią akimirką apibūdina būseną, ir dinaminė taisykli, apibrėžianti visų būsenų kintamuųjų artimiausią ateitį, atsižvelgiant tik į tų pačių būsenos kintamuųjų dabartines reikšmes. Pavyzdžiui, švytuoklės būsena yra jos kampas ir kampinis greitis, o evoliucijos taisykli yra Niutono lygtis $F = ma$.

Matematiškai dinaminę sistemą apibūdina pradinės reikšmės problema (angl. initial value problem). Tai reiškia, kad egzistuoja laiko savoka ir kad būsena vienu metu išsi-vysto į būseną arba galbūt būsenų rinkinį velesniu metu. Taigi būsenas galima išrikiuoti pagal laiką, o laikas gali būti laikomas vienu kiekiu.

Dinaminės sistemos yra deterministinės, jei yra unikali kiekvienos būsenos pasekmė, arba stochastinės (atsitiktinės), jei yra galimų pasekmių tikimybinis pasiskirstymas (monetos metimas turi du padarinius su vienoda tikimybe kiekvienai pradinei būsenai).

Dinaminė sistema gali būti diskretnaus arba tolydaus laiko. Diskretnaus laiko deterministinė sistema yra apibrėžiama kaip atvaizdis

$$x_1 = f(x_0),$$

pagal kurį sistema sekančiu laiku momentu pereina iš pradinės būsenos x_0 į naujā būseną x_1 . Po laiko n turime

$$x_n = f^n(x_0),$$

čia f^n yra n -oji f iteracija. Tolydaus laiko deterministinė dinaminė sistema yra apibūdinama srautu

$$x(t) = \phi_t(x(0)),$$

duodančiu sistemas būseną laiko momentu t laikant, kad nulinii laiko momentu sistemos būsena buvo $x(0)$. Glotnų srautą galima diferencijuoti laiko atžvilgiu ir gauti diferencialinę lygtį $dx/dt = X(x)$. Funkcija $X(x)$ yra vadinama vektoriniu lauku, kiekviename fazijų erdvės taške duodančiu greičio kryptimi nukreiptą vektorių.

Svarbus dinaminės sistemos analizės kriterijus yra tai, ar ji priklauso nuo laiko, ar ne. Nuo laiko priklausomose dinaminėse sistemoje jų evoliucija apibrėžiančios funkcijos priklauso nuo paties laiko, o nuo laiko nepriklausomose sistemoje šios funkcijos laikui bégant nesikeičia.

Atliekant analizę labai svarbu, ar dinaminė sistema yra tiesinė, ar ne. Tiesines dinamines sistemas lengva analizuoti, priešingai nei netiesines sistemas, kurios paprastai pasižymi sudėtinga dinamine elgsena [15]. Norint gauti įžvalgų apie šias sudėtingas netiesines dinamines sistemas, dažnai tam tikrose vietose naudojamas linearizavimas.

Naudojant linearizavimą yra labai svarbi dar viena dinaminių sistemų klasifikacija, leidžianti atskirti paprastus atvejus nuo sudėtingesnių. Hiperbolines dinamines sistemas galima efektyviai išanalizuoti atliekant linearizaciją, tuo tarpu ne hiperbolinės sistemas gali sukelti didelių bėdų kartu su linearizacija [1]. Hiperbolinės sistemas yra struktūriškai stabilių, t.y. maži sistemas parametru pokyčiai nekeičia kokybinės sistemas elgsenos. Ne hiperbolines sistemas sunku ištirti, jos pasitaiko retai ir gali būti laikomos pereinamaja faze tarp dviejų skirtingo pobūdžio hiperbolinių sistemų [11].

Disertacijos objektas yra stochastinės dinaminės sistemos, t.y. dinaminės sistemos, veikiamos triukšmo. Susidomėjimas svyravimų poveikiu yra guvus jau daugiau nei šimtmetį nuo pradinio Einšteino darbo [3]. Tradiciškai svyravimai yra klasifikuojami kaip triukšmingi ar stochastiniai, kai tariama jų kilmė reiškia labai didelio skaičiaus kintamųjų veikimą arba, kitaip sakant, kai egzistuoja labai daug laisvės laipsnių. Pavyzdžiui, netvarkingas dalelių šiluminis judėjimas skysčiuose arba dujose gali būti suprantamas kaip triukšmas. Iš esmės tokios didelės dimensijos judesio lygtis galima užrašyti ir nagrinėti analitiškai bei skaitmeniškai. Kita vertus sistema, veikiamą daug kintamųjų, galima tirti sujungiant jos deterministines judesio lygtis su triukšmu, kuris paprastai imituoja daugybės kintamųjų amžinajį veikimą.

Triukšmo susiejimas su netiesinėmis deterministinėmis judesio lygtimis gali privedti prie netrivialių efektų ([4], [6], [13]). Pavyzdžiui, triukšmas gali stabilizuoti nestabilią pusiausvyrą ir paslinkti išsišakojimą, t. y. parametru reikšmę, kuriai esant sistemos dinamika keičiasi kokybiškai [2]. Triukšmas gali sukelti perėjimą tarp kartu egzistuojančių deterministinių stabilių būsenų ar atraktorių. Dar įdomiau, kad triukšmas gali sukelti naujas stabilias būsenas, kurios neturi deterministinio atitinkmens. Galiausiai, triukšmas sužadina vidinius virpesių režimus tiek tiesinėse, tiek netiesinėse sistemose. Pastaruoju atveju tai netgi gali sustiprinti netiesinės sistemos reakciją į išorinius signalus [7].

Dažnai manoma, kad triukšmo poveikis prilygsta deterministinės sistemos trajektorijų iškraipymui. Iš tikrujų taip yra stebėjimų ar matavimų triukšmo atveju. Tačiau netiesinėse sistemose, kuriose triukšmas veikia kaip varomoji jėga, triukšmas gali drastiškai pakeisti deterministinę dinamiką.

Toliau panagrinėsime diskretnaus laiko tiesines stochastines dinamines sistemas, kadangi einamuoju doktorantūros etapu algoritmulų kūrimas vykdomas būtent tokiu sistemų sprendimui.

2.1 Tiesinės dinaminės sistemos modelis

Nuo laiko neprisklausanti diskreti tiesinė dinaminė sistema yra klasikinis ir plačiai naudojamas realių daugiamacių laiko eilučių duomenų $\{x_t \in \mathbb{R}^{N_x}\}_{t=1}^T$ modelis. Paslėptos būsenos $\{y_t \in \mathbb{R}^{N_y}\}_{t=1}^T$ yra gerenuojamos naudojant laiko evoliucijos matricą $A \in \mathbb{R}^{N_y \times N_y}$:

$$y_{t+1} = Ay_t + \epsilon_t,$$

čia $\{\epsilon_t\}_{t=1}^T$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę daugiamacių normalieji atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir kovariacijų matrica Q . Stebėjimai x_t yra generuojami iš y_t naudojant matricą $C \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$:

$$x_t = Cy_t + \nu_t,$$

čia $\{\nu_t\}_{t=1}^T$ taip pat yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę daugiamaciai normalieji atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir kovariacijų matrica R . Pradinės būsenos (y_1) pasiskirstymas yra daugiamatis normalusis su vidurkiu π_1 ir kovariacijų matrica Π_1 .

Tokia tiesinė dinaminė sistema yra bene dažniausiai naudojamas laiko eilučių modelis realaus pasaulyje inžinerijoje bei finansuose. Taip yra dėl salyginio modelio paprastumo, matematiškai prognozuojamo elgesio, didelio skaičiaus fizinių sistemų egzistavimo, kurios gali būti modeliuojamos tokiu modeliu, bei fakto, kad tikslios išvados ir prognozės naudojant šį modelį gali būti daromos efektyviai.

Tiesinės dinaminės sistemos identifikavimas apima parametru $\theta = \{A, C, Q, R, \pi_1, \Pi_1\}$ radimą. Populiariausi algoritmai skirtomi į tris plačias kategorijas: prognozavimo paklaidos metodas (angl. Prediction Error Method, PEM), poerdvio identifikavimas (angl. Subspace Identification, 4SID) ir tikėtinumo maksimizavimas (angl. Expectation Maximization, EM). Naudojant PEM [8], vieno žingsnio prognozės paklaidos tikslų funkcija yra minimizuojamu gradientiniais optimizavimo metodais. Dažniausiai naudojamas gradiento mažėjimo metodas, kuris reikalauja daug iteracijų konvergavimui pasiekti, arba antrojo laipsnio optimizavimo metodai, kurie nėra praktiški dideliems modeliams.

EM, kuris yra plačiai pritaikytas algoritmas paslėptų būsenų modelių didžiausio tikėtinumo parametru įverčiams, gali būti pritaikytas ir tiesinėms dinaminėms sistemoms. I dižiausio tikėtinumo funkciją galima žiūrėti kaip į atskirą prognozės paklaidos tikslų funkcijos atvejį [8], tačiau EM elgiasi skirtingai nei PEM optimizuojant tikslų funkciją, dėl ko jis tampa praktiškesnis dideliems modeliams. Ir PEM, ir EM yra iteraciniai optimizavimo algoritmai, kurių kiekvienai iteracijai reikalingas perėjimas per visą duomenų rinkinį. Kadangi gali prireikti labai daug iteracijų, šie algoritmai nėra tinkami labai ilgomis laiko eilutėmis.

Taikant 4SID metodą [9], tiesinės dinaminės sistemos lygtys yra perrašomos į didelių blokų matricines formules, kurios yra naudojamos paslėptų būsenų sekos įverčiui gauti per matricines projekcijas. Šis įvertis paskui yra naudojamos parametru įvertinimui. Blokų formulės generuoja ateities taškų prognozes naudojant tik i ankstesnių taškų, kur i yra metaparametras, reguliuojantis sprendinio kokybės santykį su skaiciavimu sudėtingumu. Palyginimui, statistiškai optimalūs būsenos įverčiai (pvz., tie, kurie naujodami EM E žingsnyje) naudoja visą laiko eilutę, apimant tiek praeities, tiek ir ateities stebėjimus. 4SID nėra iteracinis optimizavimo algoritmas kaip PEM arba EM, todėl dažniausiai būna greitesnis už šiuos metodus, tuo pačiu išvengiant blogų lokalių minimumų problemos. Kita vertus, šiuo algoritmu gaunami sprendiniai, nors ir aukštos kokybės, nėra linkę būti lokaliai optimalūs kiekvienai tikslų funkcijai (tokiai kaip logaritmės tikėtinumo). Dėl to yra siūloma naudoti EM algoritmą su sprendiniu, gautu iš 4SID algoritmo, tokiu būdu išvengiant blogo lokalaus minimumo ir tuo pačiu pasiekiant statistinių optimalumų [14]. Vienas iš 4SID algoritmo trūkumų yra didelis atminties poreikis, dėl ko algoritmas yra sunkiau pritaikomas ilgomis laiko eilutėms.

Sekančiame skyriuje paprastam tiesinės dinaminės sistemos modelio atvejui konstruosime rekursyvinį realaus laiko parametru vertinimo algoritmą.

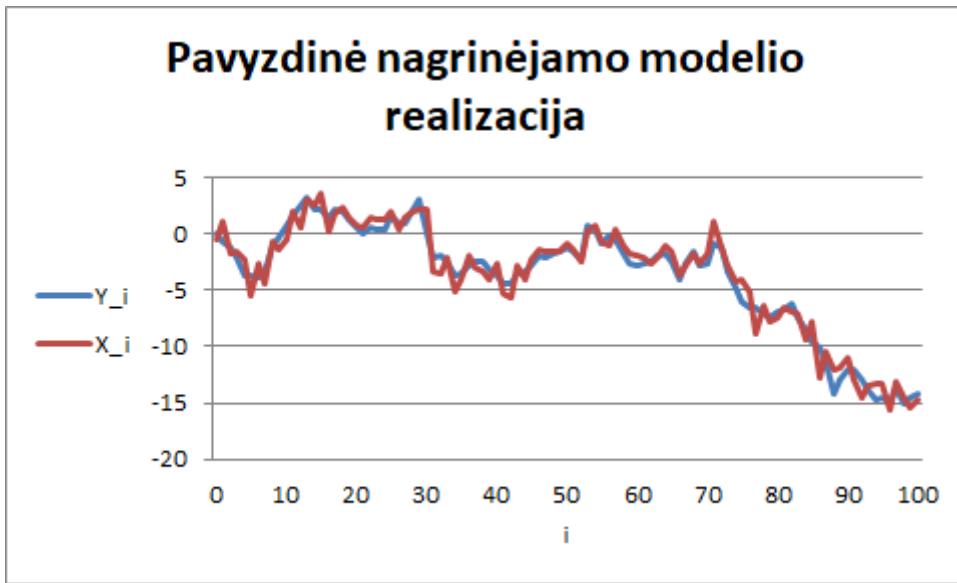
3 Diskreto laiko nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių sumų proceso, stebimo su triukšmu, parametru vertinimas realiu laiku

Nagrinėkime diskreto laiko nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių sumų proceso, stebimo su triukšmu, modelį. Vykdantį procesą žymėsime raide Y , o jo stebėjimo su triukšmu rezultatą – X :

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0, & X_0 &= \nu_0, \\ Y_i &= Y_{i-1} + \epsilon_i, & X_i &= Y_i + \nu_i, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Čia ϵ_i yra nepriklausomi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ atsitiktiniai dydžiai, o ν_0 ir ν_i – nepriklausomi $\mathcal{N}(0, \sigma_o^2)$ atsitiktiniai dydžiai.

Nagrinėjamas modelis yra atskiras tiesinės dinaminės sistemos modelio atvejis (vienmatis su $A = C = 1$ ir žinoma pradine būsena).



1 pav.: Viena nagrinėjamo modelio realizacija su $\sigma^2 = \sigma_o^2 = 1$, $n = 100$

Parametrai σ^2 ir σ_o^2 yra nežinomi. Tikslas yra juos įvertinti realiu laiku tik iš stebimų proceso reikšmių. Nagrinėsime ne pačias stebėjimų reikšmes X_0, X_1, \dots, X_n , o šių reikšmių skirtumus, t.y. $X_1 - X_0, X_2 - X_1, \dots, X_n - X_{n-1}$, kadangi tokiu atveju proceso kovariacijų matricą galima užrašyti tridiagonalinės matricos pavidalu. Pažymėkime $Z_k := X_{k+1} - X_k$, $k = 0, \dots, n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Tada gauname

$$EZ_k = 0$$

ir

$$\text{Cov}(Z_k, Z_l) = \text{E}(Z_k Z_l) = \begin{cases} \sigma^2 + 2\sigma_o^2, & k = l \\ -\sigma_o^2, & |k - l| = 1 \\ 0, & |k - l| \geq 2 \end{cases}$$

čia $k, l = 0, \dots, n - 1, n \in \mathbb{N}$.

Dabar apibrėžkime vektorių $\mathbf{Z} = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1})^\top$. Nesunku matyti, jog vektorius \mathbf{Z} turi n -matį Gauso skirstinį ir todėl tikimybinis tankis yra pavidalo

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\mathbf{Z}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{Z}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}, \quad (1)$$

čia $\Sigma := [\text{Cov}(Z_k, Z_l); 0 \leq k, l \leq n - 1]$.

Parametru σ^2 ir σ_o^2 vertinimui yra natūralu naudoti didžiausio tikėtinumo metodą [12]. Tokio pasirinkimo motyvacija yra paprasta – didžiausio tikėtinumo metodas yra vienas iš dažniausiai naudojamų statistinės išvados darymo metodų, o didžiausio tikėtinumo įverčiai pasižymi svarbiomis statistinėmis savybėmis: asymptotiniu nepaslinktumu, pagrįstumu ir asymptotiniu efektyvumu. Nežinomų parametrų įverčiai šiuo metodu yra gaunami kaip parametrai, maksimizujantys daugiamati tikimybinį tankį. Logaritmuodami (1), gauname logaritminę didžiausio tikėtinumo funkciją:

$$\mathcal{L}(\sigma^2, \sigma_o^2) = -\frac{1}{2} \left(\ln(|\Sigma|) + \mathbf{Z}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{Z} + n \ln(2\pi) \right).$$

Kadangi galioja lygybė

$$\arg \max_{\sigma^2, \sigma_o^2} \mathcal{L}(\sigma^2, \sigma_o^2) = \arg \min_{\sigma^2, \sigma_o^2} \left[\ln(|\Sigma|) + \mathbf{Z}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{Z} \right],$$

todėl toliau, turėdami omenyje, kad funkcijos $\mathcal{L}(\sigma^2, \sigma_o^2)$ maksimizavimo uždavinys keičiasi į minimizavimo uždavinį, dėl paprastumo laikysime, jog

$$\mathcal{L}(\sigma^2, \sigma_o^2) = \ln(|\Sigma|) + \mathbf{Z}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Įsivedame parametrus:

$$\begin{aligned} p &= \sigma^2 + 2\sigma_o^2 + \sqrt{(\sigma^2 + 2\sigma_o^2)^2 - (2\sigma_o^2)^2}, \\ r &= \sigma^2 + 2\sigma_o^2 - \sqrt{(\sigma^2 + 2\sigma_o^2)^2 - (2\sigma_o^2)^2}, \\ s &= \ln \left(\frac{p}{r} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Tada tikėtinumo funkciją (2) atitinka funkcija L , priklausanti nuo įsivestų parametru (kadangi mus dominis rekurentinės išraiškos, nuo šiol imties turi n rašysime kaip indek-

sa):

$$L_n(s,r) = \ln \left(\frac{\sinh(s\frac{n+1}{2})}{\sinh(s\frac{1}{2})} \right) + \frac{n}{2} \left(s + 2 \ln \left(\frac{r}{2} \right) \right) + \frac{2}{r} \frac{\zeta_n^\top C_n(s) A_n B_n(s) \zeta_n}{\sinh(s\frac{n+1}{2}) \sinh(s\frac{1}{2}) e^{\frac{s}{2}}}, \quad (4)$$

čia

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \left(Z_0, \ Z_1, \ \cdots, \ Z_{n-1} \right)^\top, \\ A_n &= \begin{bmatrix} 2, & i > j \\ 1, & i = j ; 0 \leq i, j \leq n-1 \\ 0, & i < j \end{bmatrix}, \\ B_n(s) &= \begin{bmatrix} \sinh(s\frac{i+1}{2}), & i = j ; 0 \leq i, j \leq n-1 \\ 0, & i \neq j \end{bmatrix}, \\ C_n(s) &= \begin{bmatrix} \sinh(s\frac{n-i}{2}), & i = j ; 0 \leq i, j \leq n-1 \\ 0, & i \neq j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iš lygties $(L_n(s,r))'_r = 0$ randame parametrą r :

$$r_n(s) = 2e^{-\frac{s}{2}} h_n(s), \quad (5)$$

čia

$$h_n(s) = \frac{\zeta_n^\top C_n(s) A_n B_n(s) \zeta_n}{n \sinh(s\frac{n+1}{2}) \sinh(s\frac{1}{2})}.$$

Gautąjį r išraišką įstare į (4), toliau dirbsime su vieno kintamojo funkcija $\tilde{L}_n(s)$:

$$\tilde{L}_n(s) = \ln \left(\frac{\sinh(s\frac{n+1}{2})}{\sinh(s\frac{1}{2})} \right) + n(1 + \ln h_n(s)),$$

Funkciją $h_n(s)$ užrašome per dydžius $b_n(s)$ ir $c_n(s)$, kuriuos paskui skleisime pirmos eilės Teiloro eilute ir skaičiuosime rekurentiškai:

$$\begin{aligned} h_n(s) &= \frac{1}{n} \left(\frac{b_{n-1}(s)}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(1 + \frac{\sinh(s\frac{n-1}{2})}{\sinh(s\frac{n+1}{2})} \right) \right. \\ &\quad - \frac{b_{n-2}(s)}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(\frac{\sinh(s\frac{n-1}{2})}{\sinh(s\frac{n+1}{2})} \right) \\ &\quad \left. + \frac{\sinh(s\frac{n}{2})}{\sinh(s\frac{n+1}{2})} (2Z_{n-1}c_{n-1}(s) + Z_{n-1}^2) \right), \end{aligned}$$

čia

$$b_n(s) = \frac{\zeta_n^\top C_n(s) A_n B_n(s) \zeta_n}{\sinh(s^{\frac{n+1}{2}})}, \quad (6)$$

$$c_n(s) = \frac{\zeta_n^\top \text{diag}(B_n(s))}{\sinh(s^{\frac{n+1}{2}})}. \quad (7)$$

Dabar dydžiams $b_n(s)$ ir $c_n(s)$ pritaikę Teiloro aproksimaciją taško v aplinkoje, funkciją \tilde{L} užrašome apytiksle forma (tašką v rašysime kaip kintamajį; kai $v = s$, gaunama lygybė):

$$\tilde{L}_n(s; v) \approx \ln \left(\frac{\sinh(s^{\frac{n+1}{2}})}{\sinh(s^{\frac{1}{2}})} \right) + n(1 + \ln h_n(s; v)),$$

čia

$$\begin{aligned} h_n(s; v) \approx & \frac{1}{n} \left(\frac{b_{n-1}(v) + (s - v)b'_{n-1}(v)}{\sinh(s^{\frac{1}{2}})} \left(1 + \frac{\sinh(s^{\frac{n-1}{2}})}{\sinh(s^{\frac{n+1}{2}})} \right) \right. \\ & - \frac{b_{n-2}(v) + (s - v)b'_{n-2}(v)}{\sinh(s^{\frac{1}{2}})} \left(\frac{\sinh(s^{\frac{n-1}{2}})}{\sinh(s^{\frac{n+1}{2}})} \right) \\ & \left. + \frac{\sinh(s^{\frac{n}{2}})}{\sinh(s^{\frac{n+1}{2}})} (2Z_{n-1}(c_{n-1}(v) + (s - v)c'_{n-1}(v)) + Z_{n-1}^2) \right), \end{aligned}$$

kur

$$\begin{aligned} b'_n(v) = & \frac{\zeta_n^\top C'_n(v) A_n B_n(v) \zeta_n + \zeta_n^\top C_n(v) A_n B'_n(v) \zeta_n}{\sinh(v^{\frac{n+1}{2}})} \\ & - \frac{\frac{n+1}{2} (\zeta_n^\top C_n(v) A_n B_n(v) \zeta_n) \cosh(v^{\frac{n+1}{2}})}{\sinh^2(v^{\frac{n+1}{2}})}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$c'_n(v) = \frac{\zeta_n^\top \text{diag}(B'_n(v))}{\sinh(v^{\frac{n+1}{2}})} - \frac{\frac{n+1}{2} \zeta_n^\top \text{diag}(B_n(v)) \cosh(v^{\frac{n+1}{2}})}{\sinh^2(v^{\frac{n+1}{2}})}, \quad (9)$$

o

$$\begin{aligned} B'_n(v) &= \begin{bmatrix} \cosh(v^{\frac{i+1}{2}})^{\frac{i+1}{2}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{bmatrix}; 0 \leq i, j \leq n-1, \\ C'_n(v) &= \begin{bmatrix} \cosh(v^{\frac{n-i}{2}})^{\frac{n-1}{2}}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dabar funkciją $\tilde{L}_n(s; v)$ užrašome išraiška, tinkama skaičiavimui su dideliais imties

tūriais n :

$$\tilde{L}_n(s; v) \approx \ln \left(\frac{1 - e^{-s(n+1)}}{1 - e^{-s}} \right) + s \frac{n}{2} + n (1 + \ln h_n(s; v)),$$

čia

$$h_n(s; v) \approx \frac{1}{n} \left(\frac{b_{n-1}(v) + (s - v)b'_{n-1}(v)}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(1 + e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right) \right. \\ \left. - \frac{b_{n-2}(v) + (s - v)b'_{n-2}(v)}{\sinh(s\frac{1}{2})} e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right. \\ \left. + e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 - e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}} (2Z_{n-1}(c_{n-1}(v) + (s - v)c'_{n-1}(v)) + Z_{n-1}^2) \right).$$

Dėl stabilumo, nežinomų parametrų vertinimo algoritme vietoje funkcijos $\tilde{L}_n(s; v)$ minimizuojame funkciją $\bar{L}_n(s; v) = \frac{\tilde{L}_n(s; v)}{n}$, o vietoje dydžių $b_n(s)$ ir $b'_n(s)$ atitinkamai naudosime dydžius $\bar{b}_n(s) = \frac{b_n(s)}{n}$ ir $\bar{b}'_n(s) = \frac{b'_n(s)}{n}$:

$$\bar{L}_n(s; v) \approx \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1 - e^{-s(n+1)}}{1 - e^{-s}} \right) + \frac{s}{2} + 1 + \ln h_n(s; v), \quad (10)$$

čia

$$h_n(s; v) \approx \frac{\bar{b}_{n-1}(v) + (s - v)\bar{b}'_{n-1}(v)}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 + e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right) \\ - \frac{\bar{b}_{n-2}(v) + (s - v)\bar{b}'_{n-2}(v)}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{2}{n} \right) e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \\ + \frac{1}{n} e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 - e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}} (2Z_{n-1}(c_{n-1}(v) + (s - v)c'_{n-1}(v)) + Z_{n-1}^2).$$

Kadangi išraiškoje (10) nuo taško v priklausančius dydžius nežinomų dispersijų σ^2 ir σ_o^2 vertinimo algoritme nuolat rekurentiškai perskaičiuosime su vis besikeičiančiomis v reikšmėmis, funkciją \bar{L} perrašykime į funkciją \hat{L} , kurioje nuo v priklausantys dydžiai bus tarp kintamųjų:

$$\hat{L}_n(s, v, b_1, b'_1, b_2, b'_2, c_1, c'_1) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1 - e^{-s(n+1)}}{1 - e^{-s}} \right) + \frac{s}{2} + 1 \\ + \ln \left(\frac{b_1 + (s - v)b'_1}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 + e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right) \right. \\ \left. - \frac{b_2 + (s - v)b'_2}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{2}{n} \right) e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right. \\ \left. + \frac{1}{n} e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 - e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}} (2Z_{n-1}(c_1 + (s - v)c'_1) + Z_{n-1}^2) \right). \quad (11)$$

Dabar dydžius \bar{b}, \bar{b}', c, c' užrašome rekurentinėmis išraiškomis:

$$c_n(s) = (c_{n-1}(s) + Z_{n-1}) e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 - e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}}; \quad (12)$$

$$c'_n(s) = nd_n(s) - \frac{n+1}{2} \frac{1 + e^{-s(n+1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} c_n(s), \quad (13)$$

čia

$$d_n(s) = \frac{\zeta_n^\top \operatorname{diag}(B'_n(s))}{\sinh(s \frac{n+1}{2})} \quad (14)$$

ir

$$d_n(s) = d_{n-1}(s) \left(1 - \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 - e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}} + \frac{Z_{n-1}}{2} e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 + e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_n(s) &= \bar{b}_{n-1}(s) \left(1 + e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right) - \bar{b}_{n-2}(s) e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(\sinh \left(s \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 - e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}} (2Z_{n-1}c_{n-1}(s) + Z_{n-1}^2) \right. \\ &\quad \left. - \bar{b}_{n-1}(s) \left(1 + e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right) + 2\bar{b}_{n-2}(s) e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}'_n(s) &= \bar{b}'_{n-1}(s) \left(1 + e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right) - \bar{b}'_{n-2}(s) e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \\ &\quad - (\bar{b}_{n-1}(s) - \bar{b}_{n-2}(s)) e^{-s} \frac{1 - e^{-2sn} - ne^{-sn} (e^s - e^{-s})}{1 - 2e^{-s(n+1)} + e^{-2s(n+1)}} \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(e^{-s} \frac{1 - 2e^{-sn} + e^{-2sn} + ne^{-sn} (e^s - 2 + e^{-s})}{2 (1 - 2e^{-s(n+1)} + e^{-2s(n+1)})} (2Z_{n-1}c_{n-1}(s) + Z_{n-1}^2) \right. \\ &\quad \left. + 2Z_{n-1} \sinh \left(s \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 - e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}} \left(d_{n-1}(s)(n-1) - \frac{n}{2} c_{n-1}(s) \frac{1 + e^{-sn}}{1 - e^{-sn}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \bar{b}'_{n-1}(s) \left(1 + e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right) + 2\bar{b}'_{n-2}(s) e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{b}_{n-1}(s) - 2\bar{b}_{n-2}(s)) e^{-s} \frac{1 - e^{-2sn} - ne^{-sn} (e^s - e^{-s})}{1 - 2e^{-s(n+1)} + e^{-2s(n+1)}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Dabar jau galime užrašyti rekursyvinį nežinomų parametrų σ^2 ir σ_o^2 vertinimo algoritma, leisiantį parametrų vertinimą atlikti realiu laiku:

Input. σ_{pr}^2 ir $\sigma_{o,pr}^2$ – spėjamos pradinės nežinomų modelio triukšmo dispersijų σ^2 ir σ_o^2 reikšmės; n_{pr} – imties tūris, su kurio pradedami skaičiuoti σ^2 ir σ_o^2 iverčiai; n_{pb} – imties tūris, iki kurio vyksta σ^2 ir σ_o^2 iverčių skaičiavimas.

Output. Modelio triukšmo dispersijų σ^2 ir σ_o^2 iverčiai prie skirtingu imties tūrių n .

1 žingsnis. I (3) įstatome σ_{pr}^2 ir $\sigma_{o,pr}^2$ ir randame s_{pr} .

2 žingsnis. Naudodami (6) – (9) bei (14), apskaičiuojame dydžius $b_1 = \bar{b}_{n_{pr}-1}(s_{pr})$, $b_2 = \bar{b}_{n_{pr}-2}(s_{pr})$, $b'_1 = \bar{b}'_{n_{pr}-1}(s_{pr})$, $b'_2 = \bar{b}'_{n_{pr}-2}(s_{pr})$, $c_1 = c_{n_{pr}-1}(s_{pr})$, $d_1 = d_{n_{pr}-1}(s_{pr})$, $c'_1 = c'_{n_{pr}-1}(s_{pr})$.

3 žingsnis. Randame $s_{n_{pr}}$: $s_{n_{pr}} = \min_s \hat{L}_{n_{pr}}(s, s_{pr}, b_1, b'_1, b_2, b'_2, c_1, c'_1)$ (žr. (11)); pasinaudoje funkcija

$$\begin{aligned} \hat{r}_n(s, b_1, b_2, c_1) = & 2e^{-\frac{s}{2}} \left(\frac{b_1}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 + e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \right) \right. \\ & - \frac{b_2}{\sinh(s\frac{1}{2})} \left(1 - \frac{2}{n} \right) e^{-s} \frac{1 - e^{-s(n-1)}}{1 - e^{-s(n+1)}} \\ & \left. + \frac{1}{n} e^{-\frac{s}{2}} \frac{1 - e^{-sn}}{1 - e^{-s(n+1)}} (2Z_{n-1}c_1 + Z_{n-1}^2) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

randame $r_{n_{pr}}$: $r_{n_{pr}} = \hat{r}_{n_{pr}}(s_{n_{pr}}, b_1, b_2, c_1)$; iš $s_{n_{pr}}$, $r_{n_{pr}}$ ir (3) lygčių randame $\sigma_{n_{pr}}^2$ ir $\sigma_{o,n_{pr}}^2$.

4 žingsnis. Isivedame indeksą i : $i = n_{pr}$.

5 žingsnis. Naudodami dydžius b_1 , b_2 , b'_1 , b'_2 , c_1 , d_1 ir c'_1 bei (12) – (13) ir (15) – (17) saryšius, apskaičiuojame dydžius $c_0 = c_i(s_i)$, $d_0 = d_i(s_i)$, $c'_0 = c'_i(s_i)$, $b_0 = \bar{b}_i(s_i)$, $b'_0 = \bar{b}'_i(s_i)$.

6 žingsnis. Atliekame priskyrimus: $b_2 = b_1$, $b_1 = b_0$, $b'_2 = b'_1$, $b'_1 = b'_0$, $c_1 = c_0$, $d_1 = d_0$, $c'_1 = c'_0$.

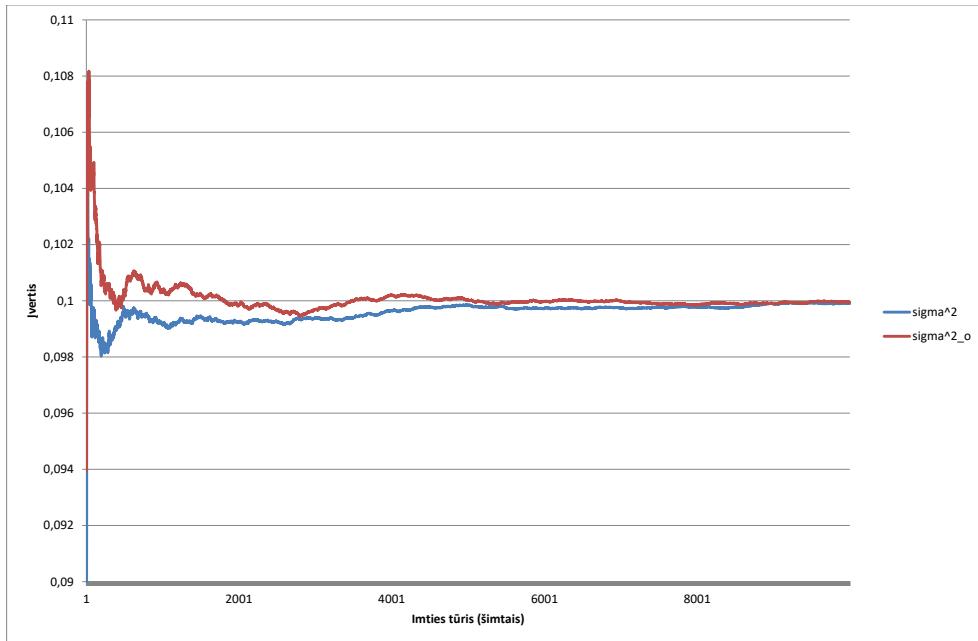
7 žingsnis. Analogiškai kaip ir 3-jame žingsnyje, apskaičiuojame s_{i+1} , r_{i+1} , σ_{i+1}^2 ir $\sigma_{o,i+1}^2$ (vietoj s_{pr} įstatomas s_i).

8 žingsnis. Atnaujiname indeksą i : $i = i + 1$.

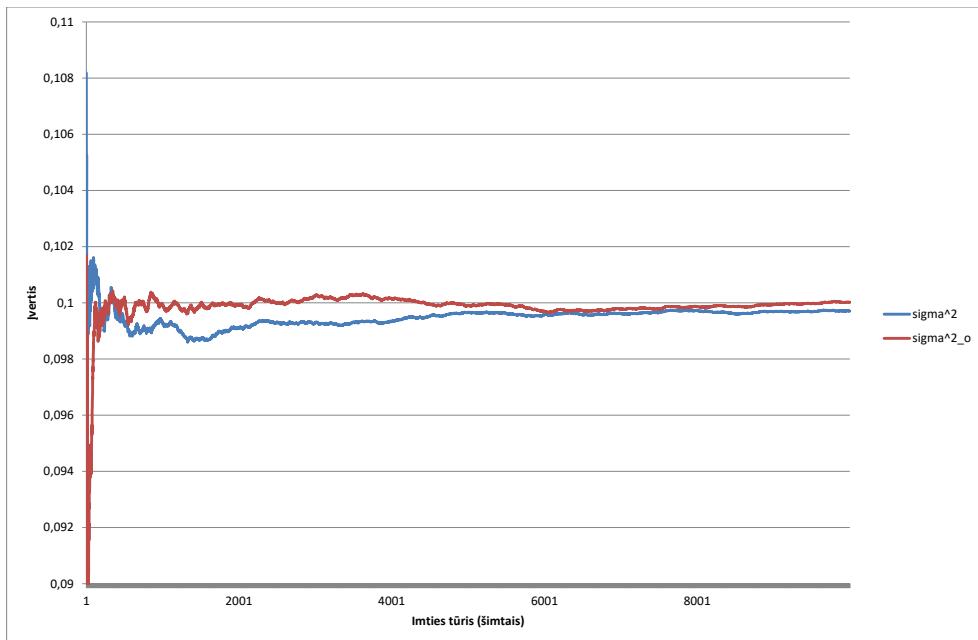
9 žingsnis. Tikriname salyga: jei $i < n_{pb}$, grįztame į 5-aji žingsnį; priešingu atveju

- stop.

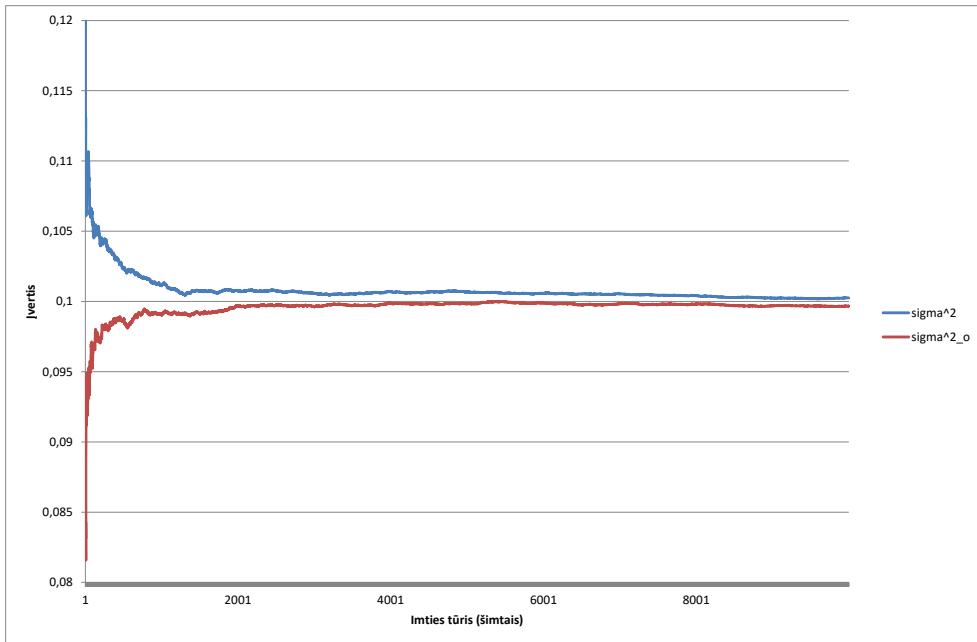
2 – 4 pav. pavaizduotas algoritmo veikimas. Visais trimis atvejais $\sigma_{pr}^2 = \sigma_{o,pr}^2 = \sigma^2 = \sigma_o^2 = 0,1$, $n_{pr} = 100$, $n_{pb} = 10^6$.



2 pav.: Algoritmo veikimo iliustracija



3 pav.: Algoritmo veikimo iliustracija



4 pav.: Algoritmo veikimo iliustracija

Galima matyti, jog skirtingos algoritmo realizacijos esant tiems patiemis simuliacioms parametrams skiriasi, tačiau nežinomų parametru įverčiai, nors ir nevienodai, artėja prie tikrujų reikšmių.

4 Išvados

Egzistuojantys diskretnaus laiko invariantinių tiesinių dinaminių sistemų identifikavimo metodai turi savų trūkumų, kas sufleruoja, jog yra prasminga ieškoti naujų, konkurencingų algoritmu, juolab, kad yra daug praktinių taikymų, kuriems sistemos parametrus reikia vertinti realiu laiku, o esama teorija yra labiau pažengusi sistemos identifikavimo uždavinio sprendime ne realaus laiko atveju.

Darbe pasiūlytas rekursyvinis realaus laiko parametru vertinimo algoritmas diskretnaus laiko nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų proceso, stebimo su triukšmu, modeliui, kuris yra atskiras tiesinių dinaminių sistemų atvejis. Atlikta kompiuterinė simuliacija verifikuoja algoritmo veikimą, tačiau reikalingi išplėstiniai simuliacioniai bei teoriniai tyrimai, iš kurių svarbiausias yra konvergavimo įrodymas.

Literatūros sąrašas

- [1] Abraham, R.; Shaw, C. (1992). *Dynamics - The Geometry of Behavior*. Addison Wesley, 2nd edition.
- [2] Arnold, L. (2003). *Random Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Corrected 2nd printing 2003.

- [3] Einstein, A. (1905). *On the Motion of Small Particles Suspended in Liquids at Rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat*. Annalen der Physik 17: 549-560.
- [4] Hänggi, P.; Marchesoni, F. (2005). *Introduction: 100 years of Brownian motion*. Chaos 15, 026101.
- [5] Honerkamp, J. (1993). *Stochastic Dynamical Systems: Concepts, Numerical Methods, Data Analysis (First ed.)*. Wiley-VCH.
- [6] Horsthemke, W.; Lefever, R. (1984). *Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*. Springer-Verlag, Berlin.
- [7] Lindner, B.; Garcia-Ojalvo, J.; Neiman, A.; Schimansky-Geier, L. (2004). *Effects of noise in excitable systems*. Phys. Rep. 392, 321.
- [8] Ljung, L. (2002). *Prediction error estimation methods*. Circuits, Systems, and Signal Processing, Volume 21, Issue 1, pp 11–21.
- [9] Overschee, P. Van; Moor, B. De (1991). *Subspace algorithms for the stochastic identification problem*. In 30th IEEE Conference on Decision and Control.
- [10] Revuz, D.; Yor, M. (1994). *Continuous martingales and Brownian motion (Second ed.)*. Springer-Verlag.
- [11] Rinaldi, S. (1995). *Nonlinear dynamical systems: Bifurcation and chaos with applications in ecology*. Notes to a lecture held at the Institute of Econometrics, Vienna University of Technology.
- [12] Rossi, R. J. (2018). *Mathematical Statistics : An Introduction to Likelihood Based Inference*. New York: John Wiley & Sons, p. 227. ISBN 978-1-118-77104-4.
- [13] Schimansky-Geier, L.; Tolstopjatenko, AV.; Ebeling, W. (1985). *Noise induced transitions due to external additive noise*. Phys. Lett. A 108, 329.
- [14] Smith, G. A.; Robinson, A. J. (2000). *A comparison between the em and subspace identification algorithms for time-invariant linear dynamical systems*. Technical report, Cambridge University.
- [15] Tsonis, A. (1992). *Chaos - From Theory to Applications*. Plenum Press.
- [16] Zarchan, P; Musoff, H. (2000). *Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Incorporated. ISBN 978-1-56347-455-2.