VILNIAUS UNIVERSITETAS

Kristina
BINGELĖ

Šturmo ir Liuvilio uždavinio su dvitaške nelokaliąja sąlyga spektro tyrimas

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai
Matematika N 001

VILNIUS 2019

Disertacija rengta 2011–2019 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:
Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)

Gynimo taryba:
Pirmininkas – **Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)
Nariai:
Prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)
Prof. dr. Pranas Katauskis (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)
Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)
Prof. habil. dr. Grigory Panasenko (Liono universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001)

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2019 m. gruodžio 13 d. 14 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto 102 auditorijoje.
Adresas: Naugarduko 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva.
Tel. +370 5 219 3050; e-paštas: `mif@mif.vu.lt`.

Disertaciją galima peržiūrėti VU interneto svetainėje adresu:
`https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius`

VILNIUS UNIVERSITY

Kristina
BINGELĖ

Investigation of Spectrum for a Sturm–Liouville problem with Two-Point Nonlocal Boundary Conditions

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Natural sciences,
Mathematics N 001

VILNIUS 2019

Doctoral dissertation was written between 2011 and 2019 at Vilnius University.

Academic supervisor:
Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001)

This doctoral dissertation will be defended in a public meeting of the Dissertation Defence Panel:
Chairman – **Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas** (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001)
Members:
Prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, Natural sciences, Mathematics – N 001)
Prof. dr. Pranas Katauskis (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001)
Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Natural sciences, Mathematics – N 001)
Prof. habil. dr. Grigory Panasenko (University of Lyon, Natural sciences, Mathematics – N 001)

The dissertation shall be defended at a public/closed meeting of the Dissertation Defence Panel at 2:00 PM on 13th of December 2019 in Room 102 of the Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University.
Address: Naugarduko 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.
Tel. +370 5 219 3050; e-mail: `mif@mif.vu.lt`.

The text of this dissertation can be accessed on the website of Vilnius University:
`https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius`

1 Įžanga

Disertacijoje yra nagrinėjami diferencialinis Šturmo ir Liuvilio uždavinys su pirmąja klasikine ir antrąja nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga ir šio uždavinio diskretusis analogas. Šiomis lygtimis aprašom įvairios realaus gyvenimo situacijos, neatitinkančios klasikinių uždavinių sąlygų. Diferencialinėmis lygtimis su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis gali būti aprašoma daug šiuolaikinės fizikos (šiluminio laidumo ir difuzijos [Ionkin 1977], tamprumas [Gordeziani 2000], šiluminio laidumo [Day 1982, 1983], biologijos ir biotechnologijų [Schuegerl 1987], [Nakhushev 1995], cheminės difuzijos, populiacijų dinamikos, medicinos mokslų ir kitų sričių [Gordeziani, Davitashvili 1999]) uždavinių. Aukštesnės eilės diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai paprastai atsiranda iš techninių taikymų. Dažniausiai tai būna daugiataškiai uždaviniai n-tosios eilės paprastosioms diferencialinėms lygtims. Šiems uždaviniams pastaruoju metu mokslinėje literatūroje skiriama nemažai dėmesio, jie tiriami tiek užsienio, tiek Lietuvos mokslininkų darbuose.

Gana nauja sritis, susijusi su šio tipo uždaviniais, yra diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis spektro tyrimas. Tikrinių reikšmių uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis yra glaudžiai susiję su diferencialinių lygčių kraštiniais uždaviniais [Boucherif 2001], [Infante 2003], tačiau tokio tipo uždaviniai yra kur kas mažiau nagrinėti negu klasikinių kraštinių sąlygų atvejai. Panašūs uždaviniai operatoriams su daugiataškėmis kraštinėmis sąlygomis nagrinėjami darbuose [Cao, Ma 2000], [Gulin, Morozova 2003]. Tačiau tikrinių reikšmių uždaviniai diferencialiniams operatoriams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis yra kur kas mažiau nagrinėti negu klasikinių kraštinių sąlygų atvejai.

2 Disertacijos mokslinė problema ir tyrimo objektas

Diferencialinių uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis spektro tyrimas yra svarbus nagrinėjant diferencialinių ir diskrečiųjų uždavinių sprendinio egzistavimą ir vienatį, tiriant baigtinių skirtumų schemų stabilumą ir pagrindžiant iteracinius metodus šiems uždaviniams. Spektro struktūros tyrimas taip pat labai svarbus ir gali būti nagrinėjamas kaip atskiras tokio tipo uždavinys.

Disertacijoje pateikiami rezultatai praplečia ir papildo iki šiol kitų mokslininkų gautus rezultatus, nes tiriamos panašių uždavinių spektro struktūra ir spektro struktūros priklausomybė nuo nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų. Disertacijoje ištirta Šturmo ir Liuvilio uždavinio su viena klasikine sąlyga kairiajame krašte ir kita nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga, priklausančia nuo dviejų parametrų (o diskrečiuoju atveju dar ir nuo tinklelio taškų skaičiaus), spektro struktūra ir priklausomybė nuo šių parametrų.

Pagrindinis disertacijos tyrimų objektas yra Šturmo ir Liuvilio uždavinys su viena klasikine (Dirichlė tipo $u(0) = 0$ arba Neimano tipo $u'(0) = 0$) kraštine sąlyga ir kita nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga. Disertacijoje nagrinėjamos keturių tipų dvitaškės nelokaliosios kraštinės sąlygos, priklausančios nuo parametrų ξ ir γ. Taip pat tiriami diskretieji Šturmo ir Liuvilio uždaviniai su Dirichlė arba Neimano tipo klasikine kraštine sąlyga ir dviejų tipų neliokaliosiomis taškinėmis sąlygomis, kurios aproksimuoja dvitaškes difrerencialinio uždavinio sąlygas.

3 Tikslas ir uždaviniai

Pagrindinis disertacijos tikslas yra ištirti diferencialinio ir diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio su viena klasikine ir antrąja dvitaške nelokaliąja kraštine sąlyga spektro struktūrą.

- Diferencialinio Šturmo ir Liuvilio uždavinio atveju nagrinėjamos dvitaškės nelokaliosios sąlygos:

$$\begin{aligned} u(1) &= \gamma u(\xi), & u(1) &= \gamma u'(\xi), \\ u'(1) &= \gamma u(\xi), & u'(1) &= \gamma u'(\xi), \\ u(\xi) &= \gamma u(1-\xi), \end{aligned}$$

  kai $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in [0,1]$. Pagrindiniai uždaviniai:

  - rasti pastoviąsias tikrines reikšmes, nepriklausančias nuo parametro γ;
  - rasti charakteristinės funkcijos nulius, polius, kritinius taškus;
  - aprašyti spektrines kreives, ištirti jų savybes;
  - ištirti spektrinės srities priklausomybę nuo nelokaliųjų sąlygų parametro ξ ir nustatyti bifurkacijos taškus ir tipus.

- Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio atveju nagrinėjamos nelokaliosios kraštinės sąlygos:

$$U_n = \gamma \frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2h}, \qquad U_n = \gamma U_m.$$

  Kairiajame krašte pasirinkta viena iš sąlygų

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = U_0.$$

  Diskretusis uždavinys gautas aproksimuojant diferencialinį uždavinį baigtinių skirtumų schema. Pagrindiniai uždaviniai:

- rasti pastoviąsias tikrines reikšmes, nepriklausančias nuo parametro γ;
- rasti charakteristinės funkcijos nulius, polius, kritinius taškus;
- nustatyti šių taškų priklausomybę nuo tinklo taškų skaičiaus;
- ištirti spektrinių kreivių elgseną ypatingų taškų aplinkoje;
- surasti ryšius tarp šių taškų skaičiaus.

4 Tyrimų metodika

Tiriant diferencialinį ir diskretųjį Šturmo ir Liuvilio uždavinius su dvitaške nelokaliąja sąlyga, naudojamas charakteristinės funkcijos (angl. *Characteristic Function*) metodas [166, Štikonas, Štikonienė 2009], [102, 104, Pečiulytė, Štikonas 2006, 2007]. Šio uždavinio spektro savybės priklauso nuo charakteristinės funkcijos, nulių, polių, pastoviųjų tikrinių reikšmių taškų ir kritinių taškų pasiskirstymo. Ir realiosios, ir kompleksinės spektro dalies tyrimas yra papildytas skaitiniais eksperimentais, kurių rezultatai iliustruoti charakteristinių funkcijų ir spektrinių kreivių grafikais.

5 Darbo struktūra ir pagrindiniai rezultatai

Disertacijoje ištirta diferencialinio ir diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio su viena klasikine pradine sąlyga kairiajame krašte ir kita nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga spektro struktūra ir priklausomybė nuo nelokaliosios sąlygos parametrų. Įrodyti teiginiai apie charakteristinės funkcijos savybes. Disertacijoje tiriamos spektrinių kreivių savybės ir bifurkacijos.

Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai, bendrosios išvados ir literatūros sąrašas. Disertacijos apimtis-137 puslapiai, literatūros saraše 174 įrašai. Pagrindinės sąvokos apibrėžtos pirmajame skyriuje ir iš dalies įvade.

Disertacijos įvade pateikti kitų autorių rezultatai tiriant uždavinius su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Gana plačiai paminėti Lietuvos mokslininkų grupės (M. Sapagovas, R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė ir kt.) darbai šia tematika. Daugelį rezultatų galima rasti apžvalginiame straipsnyje [162, Štikonas 2014]. Pristatytas charakteristinės funkcijos metodas [166, Štikonas, Štikonienė 2009] ir pagrindiniai kitų autorių rezultatai taikant šį metodą [102, 104, Pečiulytė, Štikonas 2006, 2007], [160, Štikonas 2007]. Straipsnyje [166] šis metodas buvo naudojamas tiriant uždavinio

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\xi), \tag{2}$$

spektrą. Kompleksinės tikrinės reikšmės ir spektrinės kreivės išsamiai pradėtos tirti darbuose [166], [**A3**, A. Skučaitė, K. Skučaitė-Bingelė, S. Pečiulytė, A. Štikonas 2010]. Šturmo ir Liuvilio uždavinys su integraline nelokaliąja sąlyga visiškai ištirtas [155, A. Skučaitė, Štikonas 2015], šiame straipsnyje taip pat pirmą kartą apibrėžta spektrinės kreivės sąvoka.

Toliau aprašomi pagrindiniai disertacijos rezultatai. Formuluojant teoremas, lemas ir išvadas, skliausteliuose pateikti disertacijoje naudojami pavadinimai anglų kalba. Teiginių numeracija skliausteliuose reiškia disertacijoje naudotą numeraciją „*skyrius.numeris*“.

5.1 *1 skyrius.* Diferencialinis Šturmo ir Liuvilio uždavinys su dvitaške nelokaliąja kraštine sąlyga

Pirmajame disertacijos skyriuje tiriamas Šturmo ir Liuvilio uždavinys su viena klasikine pradine sąlyga kairiajame krašte ir kita nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0,1), \tag{3}$$

$$u(0) = 0, \tag{4}$$

$$u(1) = \gamma u'(\xi) \tag{5}$$

su parametrais $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in [0,1]$. Šio skyriaus rezultatai publikuoti straipsnyje [**A1**, K. Bingelė, A. Bankauskienė, A. Štikonas, 2020].

Apibrėžkime atvaizdį $\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\lambda(q) = (\pi q)^2$. Tada atvirkštinis atvaizdis yra daugiareikšmis ir taškas $\lambda = 0$ yra pirmosios eilės *šakojimosi taškas* (angl. *Branch Point*). Taškas $q = 0$ (angl. *Ramification Point*) yra svarbus analizuojant nagrinėjamą uždavinį.

Apibrėžkime aibes $\mathbb{C}_q := \mathbb{R}_q \cup \mathbb{C}_q^+ \cup \mathbb{C}_q^-$, kur $\mathbb{R}_q := \mathbb{R}_q^- \cup \mathbb{R}_q^+ \cup \mathbb{R}_q^0$, $\mathbb{R}_q^- := \{q = x + \iota y \in \mathbb{C} : x = 0, y > 0\}$, $\mathbb{R}_q^+ := \{q = x + \iota y \in \mathbb{C} : x > 0, y = 0\}$, $\mathbb{R}_q^0 := \{q = 0\}$, $\mathbb{C}_q^+ := \{q = x + \iota y \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$ ir $\mathbb{C}_q^- := \{q = x + \iota y \in \mathbb{C} :\ x > 0,\ y < 0\}$. Atvaizdis $\lambda = (\pi q)^2$ yra bijekcija iš srities $\mathbb{C}_q$ į kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}_\lambda$. Kiekvieną Šturmo ir Liuvilio uždavinio tikrinę reikšmę λ atitinka tikrinės reikšmės taškas $q \in \mathbb{C}_q$. Realiąsias tikrines reikšmes atitinka tikrinių reikšmių taškai $q \in \mathbb{R}_q$=$\{q \in \mathbb{C}_q \colon \lambda = (\pi q)^2 \in \mathbb{R}\}$.

Netrivialus Šturmo ir Liuvilio uždavinys (3)–(5) egzistuoja tada, kai $q \in \mathbb{C}_q$ yra lygties

$$\frac{\sin(\pi q)}{\pi q} = \gamma \cos(\xi \pi q) \tag{6}$$

šaknis. Apibrėžkime dvi sveikąsias funkcijas:

$$Z(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}; \quad P_\xi(z) := \cos(\xi \pi z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Šių funkcijų nulių taškai yra svarbūs analizuojant ir aprašant Šturmo ir Liuvilio uždavinio spektrines kreives. Be to, funkcijos $Z(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$, nulių taškai z_k sutampa su klasikinio uždavinio, kai $\gamma = 0$, tikrinių reikšmių taškų aibe:

$$\hat{\mathcal{Z}} := \{z_l = l \in \mathbb{N}\},\ \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}. \tag{8}$$

Kai $\xi \neq 0$, visi funkcijos $P_\xi(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$ nuliai yra paprasti (nekartotiniai), realūs teigiami skaičiai, priklausantys aibei

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \{p_k = (k - 1/2)/\xi,\ \ k \in \mathbb{N}\}. \tag{9}$$

Pastoviosios tikrinės reikšmės nepriklauso nuo nelokaliųjų sąlygų parametro γ [166]. Kiekvienai pastoviajai tikrinei reikšmei $\lambda \in \mathbb{C}_\lambda$ egzistuoja *pastoviosios tikrinės reikšmės taškas* $q \in \mathbb{C}_q$. Pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai yra sistemos

$$Z(q) = 0, \qquad P_\xi(q) = 0, \tag{10}$$

šaknys. Pastoviųjų tikrinių reikšmių taškų aibę žymėsime $\mathcal{C}_\xi$.

Kai $\xi \in \mathbb{Q}$, laikysime, kad $\xi = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m \leqslant n$, ir $\gcd(m, n) = 1$, čia $\gcd(m,\, n)$ yra dviejų (teigiamų) sveikųjų skaičių m ir n didžiausias bendras daliklis. Taip pat naudosime žymėjimus $\mathbb{N}_o := \{2k - 1,\, k \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}_e := \{2k,\, k \in \mathbb{N}\}$.

1.1 lema (Lemma 1.6)**.** *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (3)–(5) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliosioms parametro* $\xi = m/n \in (0,\, 1)$, $m \in \mathbb{N}_o$, $n \in \mathbb{N}_e$, *reikšmėms ir yra lygios* $\lambda_s = (\pi c_s)^2$, $c_s := (s - 1/2)n$, $s \in \mathbb{N}$.

Apibrėžkime meromorfinę funkciją:

$$\gamma_c(z) = \gamma_c(z;\xi) := \frac{Z(z)}{P_\xi(z)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Meromorfinę funkciją γ_c srityje $\mathbb{C}_q$ vadiname *kompleksine charakteristine funkcija* [166].

Jeigu $c \in \mathcal{C}_\xi$, t. y. $Z(c) = 0$ ir $P_\xi(c) = 0$, turime kompleksinės charakteritinės funkcijos pašalinamąjį singuliarųjį izoliuotąjį tašką ir šių taškų (kai $m \in \mathbb{N}_o$, $n \in \mathbb{N}_e$) seką $c_s = p_{k_s} = z_{l_s}$,

$$k_s = m(s-1/2)+1/2,\ l_s = n(s-1/2),\ s \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Kompleksinė-realioji charakteristinė (arba tiesiog *charakteristinė*) *funkcija* [166] $\gamma = \gamma(q)$ yra išraiška kompleksinės charakteristinės funkcijos γ_c srityje $\mathcal{D}_\xi := \{q \in \mathbb{C}_q : \mathrm{Im}\gamma_c(q) = 0\}$, t. y. $\gamma\colon \mathcal{D}_\xi \to \mathbb{R}$. Charakteristinė funkcija $\gamma(q)$ aprašo parametro γ reikšmes taškuose $q \in \mathcal{D}_\xi$, tokias, kurioms egzistuoja nepastoviosios tikrinės reikšmės $\lambda = (\pi q)^2$. Tokiems $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ nepastoviųjų tikrinių reikšmių taškų aibė $\mathcal{E}_\xi(\gamma_0) := \gamma^{-1}(\gamma_0)$. Taigi $\mathcal{D}_\xi = \cup_{\gamma\in\mathbb{R}}\mathcal{E}_\xi(\gamma)$. *Spektrinė sritis* yra aibė $\mathcal{N}_\xi = \mathcal{D}_\xi \cup \mathcal{C}_\xi$ fiksuotai ξ reikšmei.

Šturmo ir Liuvilio uždaviniui (3)–(5) su dvitaške nelokaliąja kraštine sąlyga egzistuoja trijų tipų kritiniai taškai: pirmosios, antrosios ir trečiosios eilės. Kritinių taškų aibę pažymėkime $\mathcal{K}_\xi$.

1.2 pastaba (Remark 1.11)**.** *Kai $\xi = \xi_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, taškas $q = 0$ yra trečiosios eilės kritinis taškas plokštumoje $\mathbb{C}_q$, bet tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ yra tik pirmosios eilės kritinis taškas, nes $\lambda = 0$ yra atvaizdžio $\lambda = (\pi q)^2$ šakojimosi taškas. Jeigu $\xi \neq \xi_c$, taškas $\lambda = 0$ nėra kritinis taškas.*

Jei $q_0 \in \mathcal{D}_\xi = \cup_{\gamma\in\mathbb{R}}\mathcal{E}_\xi(\gamma)$ ir ${\gamma_c}'(q_0) \neq 0$, t. y. q_0 nėra kritinis taškas, $\mathcal{E}_\xi(\gamma)$ yra glodi parametrinė kreivė $\mathcal{N} : (\gamma_0-\delta_1, \gamma_0+\delta_2) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}_q$ taško q_0 aplinkoje ir $\mathcal{N}(\gamma_0) = q_0$. Galime pridėti rodykles šioms kreivėms. Rodyklė rodo kryptį, kuria parametro γ reikšmė didėja. Tikrinių reikšmių taškai $\mathcal{E}_\xi(\gamma)$ juda šiomis kreivėmis kintant parametrui γ. Vadiname šias kreives *spektrinėmis kreivėmis.* Charakteristinės funkcijos nulių taškai nėra kritiniai taškai ir jų aplinkoje spektrinė kreivė priklauso $\mathbb{R}_q^+$.

Kritiniame taške q_0 parametro γ reikšmė yra $0 < |\gamma(q_0)| < \infty$, ir galime tarti, kad šiame kritiniame taške kelios spektrinės kreivės susikerta, kai $\gamma = \gamma(q_0)$. k-tosios eilės kritiniame taške spektrinės kreivės keičia kryptį ir spektrinių kreivių sudaromas posūkio kampas yra $\pi/(k+1)$. Naudojame „dešiniosios rankos taisyklę“, t. y. spektrinės kreivės kritiniame taške pasuka dešinėn. Spektrines kreives numeruojame taip: jeigu taškas $q = l \in \mathcal{Z}_\xi$, kai $\gamma = 0$, yra spektrinės kreivės taškas, tokią spektrinę kreivę vadinsime *reguliariąja spektrine kreive* $\mathcal{N}_l$. Kritinius taškus numeruojame spektrinių kreivių, einančių per kritinį tašką, indeksų seka. Taigi $\mathcal{N}_l = \{\mathcal{N}(\gamma), \gamma \in \mathbb{R}, \mathcal{N}(0) = l\}$, $l \in \mathcal{Z}_\xi$. Kai $\xi = 1$, turime papildomą *pusiau reguliariąją spektrinę kreivę* $\mathcal{N}_0 := \{\mathcal{N}(\gamma), \gamma \in (0; +\infty), \mathcal{N}(1) = 0\} = \mathbb{R}_q^- \cup [0; 1/2)$.

Visiems pastoviųjų tikrinių reikšmių taškams $c_j \in \mathcal{C}_\xi$ apibrėžiame *nereguliariąją spektrinę kreivę* (sudarytą tik iš vieno taško) $\mathcal{N}_j = \{c_j\}$. Pastebime, kad nereguliarioji spektrinė kreivė gali sutapti su reguliariosios spektrinės kreivės tašku.

Jeigu $\xi \in [0, 1]$ reikšmė didėja nuo 0 iki 1, funkcijos $P_\xi(q)$ nulių taškai $p_k = (k - 1/2)/\xi$, $k \in \mathbb{N}$, juda į kairę, o funkcijos $Z(q)$ nuliai $z_l = l$, $l \in \mathbb{N}$, nekinta. Kai p_k sutampa su z_l, gauname pastoviosios tikrinės reikšmės tašką $c_s = p_{k_s} = z_{l_s} = n(s - 1/2)$, $s \in \mathbb{N}$. Šiuo atveju atsiranda kilpos tipo kreivė, kurią sudaro dvi spektrinės kreivės. Gauname *nulio ir poliaus tipo bifurkaciją* $\beta_{ZP}\colon (z_{l_s}, p_{k_s}) \to c_s \to (b_{l_s+1,l_s}, p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1})$.

Bifurkacija β_{ZP} suformuoja tokį kritinių taškų išsidėstymą b_{l_s-1,l_s+1}, b_{l_s+1,l_s}, p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1} ir kilpos tipo kreivę (kurią suformuoja spektrinės $\mathcal{N}_{l_s}$ ir $\mathcal{N}_{l_s+1}$) kompleksinėje spektro dalyje

$\mathbb{C}_q$. Kol parametro ξ reikšmė didėja, ši kilpos tipo kreivė plečiasi, o poliaus taškas p_{k_s} juda kairėn stumdamas kritinį tašką b_{l_s+1,l_s} link kito kritinio taško b_{l_s-1,l_s+1}. Šie du pirmosios eilės kritiniai taškai yra tarp nulio taško z_{l_s-1} ir poliaus taško p_{k_s}. Kai $\xi = \xi_{2b}$, šie du kritiniai taškai susijungia į vieną antrosios eilės kritinį tašką b_{l_s-1,l_s+1,l_s} ir gauname *antrosios eilės kritinio taško bifurkaciją* β_{2B}. Kai $\xi \gtrsim \xi_{2b}$, kilpos tipo kreivė (kurios viduje taškai p_{k_s} ir z_{l_s}) išnyksta ir turime dvi spektrines kreives $\mathcal{N}_{l_s}$ ir $\mathcal{N}_{l_s+1}$, kurios kertasi pirmosios eilės kritiniame taške b_{l_s,l_s+1}. Taigi $\beta_{2B}\colon (b_{l_s-1,l_s+1}, b_{l_s+1,l_s}) \to b_{l_s-1,l_s+1,l_s} \to \varnothing$.

Šios dvi bifurkacijos β_{ZP} ir β_{2B} pakeičia taškų seką $(b_{l_s-1,l_s}, z_{l_s}, p_{k_s}) \to (p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1})$, kai $z_{l_s} \neq 1$. Jei $\xi = 1/2$, kilpos tipo kreivė apie tašką $q = 1$ egzistuoja, kai $1/2 < \xi < 1$. Kai parametro ξ reikšmė didėja, vis daugiau nulių ir polių taškų pereina į kilpos vidų. Ši kilpa išnyksta, kai $\xi = 1$.

5.2 *2 skyrius.* Spektrinės kreivės uždavinio su kito tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

Antrajame disertacijos skyriuje nagrinėjama keletas diferencialinių Šturmo ir Liuvilio uždavinių su viena klasikine Dirichlė arba Neimano kraštine sąlyga ir kita nelokaliąja dvitaške sąlyga. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai publikuoti straipsniuose [A6, K. Skučaitė, S. Pečiulytė, A. Štikonas 2009], [A5, K. Skučaitė-Bingelė, A. Štikonas 2011] (su Dirichlė sąlyga ir Neimano sąlyga), [A4, K. Skučaitė-Bingelė, A. Štikonas 2013] (simetrinė nelokalioji sąlyga).

5.2.1 Šturmo ir Liuvilio uždavinys su klasikine Dirichlė tipo ir kita dvitaške nelokaliąja kraštine sąlyga

Nagrinėkime Šturmo ir Liuvilio uždavinį su viena klasikine kraštine sąlyga

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0,1), \tag{13}$$

$$u(0) = 0 \tag{14}$$

ir antrąja nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga

$$u'(1) = \gamma u(\xi), \tag{15_1}$$

$$u'(1) = \gamma u'(\xi) \tag{15_2}$$

su parametrais $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in [0,1]$. Indeksas formulės numeracijoje nurodo nelokaliosios sąlygos atvejį. Šio uždavinio realiosios tikrinės reikšmės tiriamos straipsniuose [100, 102–104, 107].

Netrivialusis sprendinys (tikrinė funkcija) egzistuoja tada, kai q yra sekančios lygties šaknis:

$$\cos(\pi q) = \gamma \frac{\sin(\xi\pi q)}{\pi q}, \tag{16_1}$$

$$\cos(\pi q) = \gamma \cos(\xi\pi q). \tag{16_2}$$

Apibrėžkime fukcijas:

$$Z(z) := \cos(\pi q); \quad P_\xi(z) := \frac{\sin(\xi\pi q)}{\pi q}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{17_1}$$

$$Z(z) := \cos(\pi q); \quad P_\xi(z) := \cos(\xi\pi q), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{17_2}$$

Funkcijos $Z(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$ nulių aibė yra

$$\hat{\mathcal{Z}} := \{z_l = l - 1/2, \quad l \in \mathbb{N}\}. \tag{18}$$

Kai $\xi \neq 0$ visi funkcijos $P_\xi(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$, nuliai paprasti, realūs ir teigiami:

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \{p_k = k/\xi, \quad k \in \mathbb{N}\}, \tag{19_1}$$

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \{p_k = (k - 1/2)/\xi, \ \ k \in \mathbb{N}\}. \tag{19_2}$$

2.1 lema (Lemma 2.3)**.** *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (13)–(15_1) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliosioms parametro* $\xi = m/n \in (0,\, 1)$, $m \in \mathbb{N}_e$, $n \in \mathbb{N}_o$, *reikšmėms ir tikrinės reikšmės lygios* $\lambda_s = (\pi c_s)^2$, $c_s := (s - 1/2)n$, $s \in \mathbb{N}$.

2.2 lema (Lemma 2.4)**.** *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (13)–(15_2) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliosioms parametro* $\xi = m/n \in (0,\, 1)$, $m, n \in \mathbb{N}_o$, *reikšmėms ir tikrinės reikšmės lygios* $\lambda_s = (\pi c_s)^2$, $c_s := n(s - 1/2)$, $s \in \mathbb{N}$.

Šturmo ir Liuvilio uždavinio (3)–(5) meromorfinė kompleksinė charakteristinė funkcija yra

$$\gamma_c(q) = \frac{Z(q)}{P_\xi(q)} = \frac{\pi q \cos(\pi q)}{\sin(\xi \pi q)}, \quad q \in \mathbb{C}_q, \tag{20_1}$$

$$\gamma_c(q) = \frac{Z(q)}{P_\xi(q)} = \frac{\cos(\pi q)}{\cos(\xi \pi q)}, \quad q \in \mathbb{C}_q. \tag{20_2}$$

2.3 pastaba (Remark 2.7)**.** *Pirmuoju atveju, kai* $\xi = 1$, *kompleksinė charakteristinė funkcija* $\gamma_c = \pi q \cos(\pi q)/\sin(\pi q)$ *yra tokia pati kaip pirmojo skyriaus Šturmo ir Liuvilio uždavinio kompleksinė charakteristinė funkcija* $\tilde{\gamma} = \pi q \cos(\pi q)/\sin(\pi q)$, *kai* $\xi = 1$, *t. y. realioji charakteristinė funkcija ir spektrinės kreivės elgiasi vienodai. Čia* $\tilde{\gamma} = \gamma^{-1}$.

Pirmosios nelokaliosios sąlygos atveju, kai parametras ξ mažėja, tai funkcijos $P_\xi(q)$ nuliai $p_k = k/\xi$, $k \in \mathbb{N}$, juda į dešinę, o funkcijos $Z(q)$ nuliai $z_l = l - 1/2$, $l \in \mathbb{N}$, nejuda (lieka pastovūs visiems ξ). Tokį pat bifurkacijos tipą turėjome pirmajame skyriuje, kai parametro ξ reikšmė didėjo. Pažymėkime tokį *atvirkštinės nulio ir poliaus bifurkacijos* tipą
$\beta_{ZP}^{-1}\colon (b_{l_s-1,l_s}, p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1}) \to c_s \to (z_{l_s}, p_{k_s})$.

Prieš įvykstant β_{ZP}^{-1} bifurkacijai turime taškų seką b_{l_s-1,l_s}, z_{l_s}, p_{k_s}, b_{l_s,l_s-1}, b_{l_s-1,l_s+1} ir kilpos tipo kreivę (susiformavusią iš spektrinių kreivių $\mathcal{N}_{l_s-1}$ ir $\mathcal{N}_{l_s}$ dalių) kompleksinėje spektro dalyje $\mathbb{C}_q$. Turime *atvirkštinę antrosios eilės kritinio taško* bifurkaciją β_{2B}^{-1}. Kai $\xi \lesssim \xi_{2b}$, kilpos tipo kreivė (kurios viduje buvo taškai p_{k_s} ir z_{l_s}) išnyksta ir mes gauname dvi spektrines kreives $\mathcal{N}_{l_s-1}$ ir $\mathcal{N}_{l_s}$, kurios kertasi kritiniame taške b_{l_s-1,l_s}. Taigi $\beta_{2B}^{-1}\colon \varnothing \to b_{l_s,l_s-1,l_s+1} \to (b_{l_s,l_s-1}, b_{l_s-1,l_s+1})$.

Taigi šios dvi bifurkacijos β_{2B}^{-1} and β_{ZP}^{-1} pakeičia taškų seką $(b_{l_s-1,l_s}, z_{l_s}, p_{k_s}) \to (p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1})$, kai $z_{l_s} \neq 1$.

Antrosios nelokaliosios sąlygos atveju kompleksinių tikrinių reikšmių spektras nėra toks sudėtingas. Apibrėžiame tokio tipo bifurkaciją kaip *simetrinę nulio ir poliaus bifurkaciją* $\beta_{ZP}^{0}\colon (b_{l_s-1,l_s}, z_{l_s}, p_{k_s}) \to c_s = b_{l_s-1,l_s+1} \to (p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1})$.

5.2.2 Šturmo ir Liuvilio uždavinys su klasikine Neimano tipo ir kita dvitaške nelokaliąja kraštine sąlyga

Nagrinėkime Šturmo ir Liuvilio uždavinį

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0,1), \tag{21}$$

su viena klasikine (Neimano tipo) taškine sąlyga

$$u'(0) = 0 \tag{22}$$

ir antra dvitaške nelokaliąja kraštine sąlyga ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$):

$$u'(1) = \gamma u(\xi), \tag{23_1}$$

$$u'(1) = \gamma u'(\xi), \tag{23_2}$$

$$u(1) = \gamma u'(\xi), \tag{23_3}$$

$$u(1) = \gamma u(\xi), \tag{23_4}$$

kur parametrai $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in [0,1]$. Nagrinėsime uždavinį (21)–(23) su sąlygomis $\xi \in [0,1]$ pirmuoju atveju, $\xi \in (0,1)$ antruoju atveju, $\xi \in (0,1]$ trečiuoju atveju ir $\xi \in [0,1)$ ketvirtuoju atveju.

2.4 teorema (Theorem 2.9). *Šturmo ir Liuvilio uždaviniai* (13)–(15_2) *ir* (21)–(23_4) *sutampa visoms parametrų* γ *ir* ξ *reikšmėms.*

2.5 išvada (Corollary 2.10). *Šturmo ir Liuvilio uždavinių* (13)–(15_2) *ir* (21)–(23_4) *spektrinės kreivės ir spektrinė sritis* $\mathcal{N}_\xi$ *yra tokios pačios.*

Apibrėžkime funkcijas:

$$Z(z) := \pi z \sin(\pi z); \quad P_\xi(z) := -\cos(\xi \pi z), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{24_1}$$

$$Z(z) := \pi z \sin(\pi z); \quad P_\xi(z) := \pi z \sin(\pi z \xi), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{24_2}$$

$$Z(z) := \cos(\pi z); \quad P_\xi(z) := -\pi z \sin(\pi z \xi), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{24_3}$$

Funkcijos $Z(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$, nulių taškų aibė

$$\hat{\mathcal{Z}} := \{z_l = l, \quad l \in \mathbb{N}_0\}, \tag{$25_{1,2}$}$$

$$\hat{\mathcal{Z}} := \{z_l = l - 1/2, \quad l \in \mathbb{N}\}. \tag{25_3}$$

Funkcijos $P_\xi(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$, visi nuliai yra paprasti ir neneigiami:

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \{p_k = (k - 1/2)/\xi, \ \ k \in \mathbb{N}\}, \tag{26_1}$$

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \{p_k = k/\xi, \quad k \in \mathbb{N}_0\}. \tag{$26_{2,3}$}$$

2.6 lema (Lemma 2.15). *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (21)–(23_1) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliosioms parametro* $\xi = m/n \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{N}_o$, $n \in \mathbb{N}_e$, *reikšmėms, ir šios pastoviosios tikrinės reikšmės yra lygios* $\lambda_s = (\pi c_s)^2$, $c_s := n(s - 1/2)$, $s \in \mathbb{N}$.

2.7 lema (Lemma 2.16). *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (21)–(23_2) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliosioms parametro* $\xi = m/n \in (0, 1)$, $m, n \in \mathbb{N}$, *reikšmėms, ir šios pastoviosios tikrinės reikšmės yra lygios* $\lambda_s = (\pi c_s)^2$, $c_s := ns$, $s \in \mathbb{N}_0$.

2.8 lema (Lemma 2.17). *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (21)–(23$_3$) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliosioms parametro* $\xi = m/n \in (0,1)$, $m \in \mathbb{N}_e$, $n \in \mathbb{N}_o$, *reikšmėms, ir šios pastoviosios tikrinės reikšmės yra lygios* $\lambda_s = (\pi c_s)^2$, $c_s := n(s - 1/2)$, $s \in \mathbb{N}$.

Šturmo ir Liuvilio uždavinio (21)–(23) kompleksinę charakteristinė funkcija yra

$$\gamma_c(q) : -\frac{\pi q \sin(\pi q)}{\cos(\xi \pi q)}, \tag{27$_1$}$$

$$\gamma_c(q) := \frac{\sin(\pi q)}{\sin(\xi \pi q)}, \tag{27$_2$}$$

$$\gamma_c(q) := -\frac{\cos(\pi q)}{\pi q \sin(\xi \pi q)}. \tag{27$_3$}$$

Šturmo ir Liuvilio uždaviniams (21)–(23$_1$) ir (21)–(23$_2$) neigiami kritiniai ($b \in \mathbb{R}_q^-$) taškai neegzistuoja [107]. Šturmo ir Liuvilio uždaviniui (21)–(23$_3$) turime vieną neigiamą kritinį tašką, kai $0 < \xi < 1$ [107].

Šturmo ir Liuvilio uždaviniams (21)–(23$_1$) ir (21)–(23$_2$) egzistuoja pirmosios ir antrosios eilės kritiniai taškai. Šturmo ir Liuvilio uždaviniui (21)–(23$_2$) egzistuoja nenuliniai pirmosios eilės kritiniai taškai ir kritinis taškas $b = 0$, turintis antrosios eilės kritinio taško savybes srityje $\mathbb{C}_q$.

2.9 teorema (Theorem 2.25). *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (21)–(23$_2$) *spektras turi vieną papildomą paprastą tikrinę reikšmę* $\lambda = 0$, *kurios neturi Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (1)–(2) *spektras, visiems* γ *ir* $\xi \in (0,1)$.

Pirmosios nelokaliosios sąlygos atveju turime dviejų tipų bifurkacijas $\beta_{ZP}^{-1}\colon (b_{l_s-1,l_s}, p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1}) \to c_s \to (z_{l_s}, p_{k_s})$ ir $\beta_{2B}^{-1}\colon \varnothing \to b_{l_s,l_s-1,l_s+1} \to (b_{l_s,l_s-1}, b_{l_s-1,l_s+1})$. Pavyzdžiui, tokio tipo bifurkacijos egzistuoja, kai $\xi = 1/2, 1/4, 3/4$. Šių dviejų tipų bifurkacijos

β_{2B}^{-1} ir β_{ZP}^{-1} pakeičia taškų išsidėstymo seką $(b_{l_s-1,l_s}, z_{l_s}, p_{k_s}) \to (p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1})$.

Antrosios nelokaliosios sąlygos atveju turime du bifurkacijų tipus $\beta_{ZP}^0\colon (b_{l_s-1,l_s}, z_{l_s}, p_{k_s}) \to c_s = b_{l_s-1,l_s+1} \to$
$(p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1})$ (kaip straipsnyje [166]).

Trečiosios nelokaliosios sąlygos atveju turime du bifurkacijos tipus $\beta_{ZP}\colon (b_{l_s-1,l_s}, p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1}) \to c_s \to (z_{l_s}, p_{k_s})$ ir $\beta_{2B}\colon \varnothing \to b_{l_s,l_s-1,l_s+1} \to (b_{l_s,l_s-1}, b_{l_s-1,l_s+1})$. Šių dviejų tipų bifurkacijos β_{ZP} ir β_{2B} pakeičia taškų išsidėstymo seką
$(b_{l_s-1,l_s}, z_{l_s}, p_{k_s}) \to (p_{k_s}, z_{l_s}, b_{l_s,l_s+1})$.

5.2.3 Šturmo ir Liuvilio uždavinys su viena simetrine nelokaliąja sąlyga

Nagrinėkime Šturmo ir Liuvilio uždavinį su viena klasikine taškine sąlyga

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0, 1), \tag{28}$$

$$u(0) = 0 \tag{29}$$

ir antrąja nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga

$$u(\xi) = \gamma u(1 - \xi) \tag{30}$$

su parametrais $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $0 < \xi < 1$, $\xi \neq 1/2$.

2.10 lema (Lemma 2.28)**.** *Tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja tada ir tik tada, kai $\gamma = \frac{\xi}{1-\xi}$.*

Ši lygtis turi netrivialųjį sprendinį, jeigu q yra lygties

$$\frac{\sin(\xi\pi q)}{\pi q} = \gamma \frac{\sin\big((1-\xi)\pi q\big)}{\pi q} \tag{31}$$

šaknis. Apibrėžkime funkcijas

$$Z_\xi(z) := \frac{\sin(\xi\pi z)}{\pi z}; \quad P_\xi(z) := Z_{1-\xi}(z) = \frac{\sin\big((1-\xi)\pi z\big)}{\pi z}. \tag{32}$$

Funkcijų $Z_\xi(q)$ ir $P_\xi(q) = Z_{1-\xi}(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$ nulių taškų aibės yra

$$\hat{\mathcal{Z}}_\xi := \{z_l = l/\xi, l \in \mathbb{N}\}, \tag{33}$$

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \{p_k = k/(1-\xi), k \in \mathbb{N}\}. \tag{34}$$

2.11 lema (Lemma 2.29). *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (28)–(30) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliosioms parametro* $\xi = m/n \in (0, 1)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\xi \neq 1/2$, *reikšmėms, ir jos lygios* $\lambda_s = (\pi c_s)^2$, $c_s = ns$, $s \in \mathbb{N}$.

Šturmo ir Liuvilio uždaviniui (28)–(30) apibrėžiame kompleksinę charakteristinę funkciją

$$\gamma_c(q) = \frac{Z(q)}{Z_{1-\xi}(q)} = \frac{\sin(\xi\pi q)}{\sin\big((1-\xi)\pi q\big)}, \quad q \in \mathbb{C}_q. \tag{35}$$

2.12 teorema (Theorem 2.33). *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (28)–(30) *spektras, kai* $1/2 < \xi < 1$, *sutampa su Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (1)–(2) *spektru.*

5.3 *3 skyrius.* Diskretieji Šturmo ir Liuvilio uždaviniai

Šiame skyriuje tiriami *diskretieji Šturmo ir Liuvilio uždaviniai*, atitinkantys diferencialinius Šturmo ir Liuvilio uždavinius, nagrinėtus disertacijos pirmajame ir antrajame skyriuose. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai publikuoti straipsniuose [A5, K. Skučaitė-Bingelė and A. Štikonas 2011] ir [**A2**, K. Bingelė, A. Bankauskienė and A. Štikonas 2019].

Įveskime tolygų tinklą ir naudokime žymėjimus $\overline{\omega}^h = \{t_j = jh, j = \overline{0,n};\ nh = 1\}$, kai $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$, ir $\mathbb{N}^h := (0, n) \cap \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}}^h := \mathbb{N}^h \cup \{0, n\}$. Padarykime prielaidą, kad parametro ξ reikšmė sutampa su tinklo tašku, t. y. $\xi = mh = m/n$, $0 \leqslant m \leqslant n$.

Pažymėkime didžiausią bendrą daliklį $K := \gcd(n,m)$ ir $N := n/K$, $M := m/K$. Tada $\xi = M/N$.

Diferencialinę lygtį $-u'' = \lambda u$ aproksimuojame baigtinių skirtumų schema

$$\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + \lambda U_j = 0, \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{36}$$

Apibrėžkime bijekciją

$$\lambda = \lambda^h(q) = \tfrac{4}{h^2}\sin^2(\pi q h/2) = \tfrac{2}{h^2}\big(1 - \cos(\pi z h)\big) \tag{37}$$

tarp $\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}$ ir $\mathbb{C}_q^h$, kur $\mathbb{C}_q^h := \mathbb{R}_y^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_x^h \cup \{n\} \cup \mathbb{R}_q^{h+} \cup \mathbb{C}_y^{h+} \cup \mathbb{C}_q^{h-}$, $\mathbb{R}_x^h := \{q = x \colon 0 < x < n\}$, $\mathbb{R}_y^- := \{q = \imath y \colon y > 0\}$, $\mathbb{R}_y^{h+} := \{q = n + \imath y \colon y > 0\}$, $\mathbb{C}_q^{h+} := \{q = x + \imath y \colon 0 < x < n, y > 0\}$, $\mathbb{C}_q^{h-} := \{q = x + \imath y \colon 0 < x < n, y < 0\}$.

Bendrasis lygties (37) sprendinys U_j, $j \in \overline{\mathbb{N}}^h$ yra lygus:

$$U_j = C_1 \frac{\sin(\pi q t_j)}{(1 - hq)\pi q} + C_2 \cos(\pi q t_j). \tag{38}$$

5.3.1 Uždavinys su viena klasikine Dirichlė sąlyga ir antrąja nelokaliąja kraštine sąlyga

Nagrinėsime *diskretųjį Šturmo ir Liuvilio uždavinį*:

$$\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + \lambda U_j = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{39}$$

$$U_0 = 0, \tag{40}$$

su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis $(0 < m < n)$

$$U_n = \tfrac{\gamma}{2h}(U_{m+1} - U_{m-1}), \tag{41_1}$$

$$U_n = \gamma U_m. \tag{41_2}$$

Jeigu (38) įstatysime į kraštines sąlygas, gausime lygtį $q \in \mathbb{C}_q^h$:

$$\frac{\sin(\pi q)}{\pi q} \cdot \frac{\pi q h}{\sin(\pi q h)} = \gamma \cos(\xi \pi q), \tag{42_1}$$

$$\frac{\sin(\pi q)}{\pi q} \cdot \frac{1}{1 - hq} = \gamma \frac{\sin(\xi \pi q)}{\pi q} \cdot \frac{1}{1 - hq}. \tag{42_2}$$

Apibrėžkime funkcijas:

$$Z^h(z) := Z(z) \cdot \frac{\pi z h}{\sin(\pi z h)}, \qquad Z(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, \tag{43_1}$$

$$Z^h(z) := Z(z) \cdot \frac{1}{\pi z(hz - 1)}, \qquad Z(z) := \sin(\pi z); \tag{43_2}$$

$$P_\xi^h(z) = P_\xi(z) := \cos(\xi \pi z), \tag{44_1}$$

$$P_\xi^h(z) = P_\xi(z) \cdot \frac{1}{\pi z(hz - 1)}, \qquad P_\xi(z) := \sin(\xi \pi z). \tag{44_2}$$

Funkcijos $Z^h(q)$, $q \in \mathbb{C}_q^h$, nulių taškų aibė yra

$$\hat{\mathcal{Z}} := \mathbb{N}^h = \{1, \ldots, n-1\}. \tag{45}$$

Funkcijos $P_\xi^h(q)$, $q \in \mathbb{C}_q^h$ visi nuliai yra paprasti:

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \{p_k = (k - 1/2)/\xi, \ \ k = \overline{1, m}\}, \tag{46_1}$$

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \{p_k = k/\xi, \ \ k = \overline{1, m-1}\}. \tag{46_2}$$

3.1 lema (Lemma 3.5)**.** *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (39)–(41_1) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja, kai* $\xi = M/N \in (0,1)$, $M \in \mathbb{N}_o$, $N \in \mathbb{N}_e$, *ir šios tikrinės reikšmės yra lygios* $\lambda_s = \lambda^h(c_s)$, $c_s := (s - 1/2)N$, $s = \overline{1, K}$.

3.2 lema (Lemma 3.6)**.** *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (39)–(41_2) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja, kai* $\xi = M/N \in (0,1)$, $M, N \in \mathbb{N}$, $K > 1$, *ir šios tikrinės reikšmės yra lygios* $\lambda_s = \lambda^h(c_s)$, $c_s := Ns$, $s = \overline{1, K-1}$.

Apibrėžkime *kompleksinę charakteristinę funkciją* $\gamma_c\colon \mathbb{C}_q^h \to \mathbb{C}$:

$$\gamma_c(q) := \frac{Z(q)}{P_\xi(q)} \cdot \frac{\pi q h}{\sin(\pi q h)} = \frac{\sin(\pi q)}{\pi q \cos(\xi \pi q)} \cdot \frac{\pi q h}{\sin(\pi q h)}, \qquad (47_1)$$

$$\gamma_c(q) := \frac{Z(q)}{P_\xi(q)} = \frac{\sin(\pi q)}{\sin(\xi \pi q)}. \qquad (47_2)$$

3.3 lema (Lemma 3.10)**.** *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (39)–(41_2) *kompleksinė charakteristinė funkcija taške* $q = \infty$ *turi* $n - m$*-eilės poliaus tašką.*

3.4 lema (Lemma 3.11)**.** *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (39)–(41_1) *kompleksinė charakteristinė funkcija taške* $q = \infty$ *turi* $n - m - 1$*-eilės poliaus tašką, kai* $m < n - 1$*. Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (39)–(41_1) *kompleksinė charakteristinė funkcija taške* $q = \infty$ *turi pašalinamą singuliarųjį tašką, kai* $m = n - 1$ *ir* $\gamma_c(\infty) = 2h$*. Šis taškas taip pat yra pirmosios eilės kritinis taškas.*

5.3.2 Uždavinys su viena klasikine Neimano tipo sąlyga ir antrąja nelokaliąja kraštine sąlyga

Nagrinėkime diskretųjį Šturmo ir Liuvilio uždavinį:

$$\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + \lambda U_j = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \qquad (48)$$

$$U_0 = U_1 \qquad (49)$$

su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis $(0 < m < n)$

$$U_n = \tfrac{\gamma}{2h}(U_{m+1} - U_{m-1}), \qquad (50_1)$$

$$U_n = \gamma U_m. \qquad (50_2)$$

Ieškome netrivialaus sprendinio, kuris turi tokią išraišką

$$U_j = C \frac{\cos\left(\pi q (t_j - h/2)\right)}{\cos(\pi q h/2)}. \qquad (51)$$

Įstatę sprendinį (51) su $C \neq 0$ į nelokaliąją kraštinę sąlygą, gausime lygtį $q \in \mathbb{C}_q^h$:

$$-\frac{\cos\big(\pi q(1-h/2)\big)}{\cos(\pi q h/2)} = \gamma \sin\big(\pi q(\xi - h/2)\big) \cdot \frac{\sin(\pi q h/2)}{h/2}, \quad (52_1)$$

$$\frac{\cos\big(\pi q(1-h/2)\big)}{\cos(\pi q h/2)} = \gamma \frac{\cos\big(\pi q(\xi - h/2)\big)}{\cos(\pi q h/2)}. \quad (52_2)$$

Apibrėžkime funkcijas:

$$Z^h(z) := \frac{\cos\big(\pi z(1-h/2)\big)}{\cos(\pi z h/2)}; \quad (53)$$

$$P_\xi^h(z) := -\sin\big(\pi z(\xi - h/2)\big) \cdot \frac{\sin(\pi z h/2)}{h/2}, \quad (54_1)$$

$$P_\xi^h(z) := \frac{\cos\big(\pi z(\xi - h/2)\big)}{\cos(\pi z h/2)}. \quad (54_2)$$

Funkcijos $Z^h(q)$, $q \in \mathbb{C}_q^h$, nulių taškų aibė yra

$$\hat{\mathcal{Z}} := \Big\{ z_l = \frac{l-1/2}{1-h/2} = \frac{2l-1}{2n-1} n, \;\; l = \overline{1, n-1} \Big\}. \quad (55)$$

Funkcijos $P_\xi^h(q)$, $q \in \mathbb{C}_q^h$, nulių taškų aibė yra

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \Big\{ p_k = \frac{k}{\xi - h/2} = \frac{2k}{2m-1} n, \;\; k = \overline{0, m-1} \Big\}, \quad (56_1)$$

$$\overline{\mathcal{Z}}_\xi := \Big\{ p_k = \frac{k-1/2}{\xi - h/2} = \frac{2k-1}{2m-1} n, \;\; k = \overline{1, m-1} \Big\}. \quad (56_2)$$

3.5 lema (Lemma 3.17)**.** *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (48)*–(*50_1) *pastoviosios tikrinės reikšmės neegzistuoja.*

Jeigu $\xi = m/n \in \mathbb{Q}$ ir $\gcd(2n-1, 2m-1) = K$, naudosime žymėjimus $N = \big((2n-1)/K + 1\big)/2$, $M = \big((2m-1)/K + 1)\big)$, Taigi $\gcd(2N-1, 2M-1) = 1$ ir $K \in \mathbb{N}_o$.

3.6 lema (Lemma 3.18). *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (48)–(50$_2$) *pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja, kai* $\xi = m/n \in (0,\,1)$, $K > 1$, *ir šios tikrinės reikšmės yra lygios* $\lambda_s = \lambda^h(c_s)$, $c_s := n/K \cdot (2s-1)$, $s = \overline{1, (K-1)/2}$.

Apibrėžkime *kompleksinę charakteristinę funkciją*

$$\gamma_c(q) := -\frac{\cos\big(\pi q(1-h/2)\big)}{\sin\big(\pi q(\xi-h/2)\big)} \cdot \frac{h}{\sin(\pi q h)}, \tag{57$_1$}$$

$$\gamma_c(q) := \frac{\cos\big(\pi q(1-h/2)\big)}{\cos\big(\pi q(\xi-h/2)\big)}. \tag{57$_2$}$$

3.7 lema (Lemma 3.20). *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (48)–(50$_1$) *kompleksinė charakteristinė funkcija taške* $q = \infty$ *turi* $n-m-1$*-eilės poliaus tašką, kai* $m < n-1$. *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (48)–(50$_1$) *kompleksinė charakteristinė funkcija taške* $q = \infty$ *turi pašalinamą singuliarųjį tašką, kai* $m = n-1$ *ir* $\gamma_c(\infty) = 2h$. *Šis taškas yra pirmosios eilės kritinis taškas, kai* $n > 2$.

3.8 lema (Lemma 3.20). *Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (48)–(50$_2$) *kompleksinė charakteristinė funkcija taške* $q = \infty$ *turi* $n-m$*-eilės poliaus tašką.*

Mes turime vieną neigiamą kritinį tašką $b \in \mathbb{R}_q^{h-}$, kai $m+1 < n$. Jeigu $m+1 = n$, neigiami kritiniai taškai neegzistuoja. Jeigu $n = m+1 > 2$, turime pirmosios eilės kritinį tašką taške $q = \infty$, be to, kai $\xi = 1/2$, taške $q = \infty$ pašalinamas singuliarusis taškas.

6 Rezultatų sklaida

Disertacijos rezultatai pristatyti 7 tarptautinėse mokslinėse konferencijose:

- *MMA2018*, Sigulda, Latvija, 2018 m. gegužės 29 d.–birželio 1 d.

  "Sturm–Liouville problem with two-point nonlocal boundary condition"
- *MMA2017*, Druskininkai, Lietuva, 2017 m. gegužės 30 d.–birželio 2 d.

  "Investigation of spectrum curves for Sturm–Liouville problem with two-point nonlocal boundary condition"
- *MMA2014*, Druskininkai, Lietuva, 2014 m. gegužės 26–29 d.

  "Investigation of critical points for Strum–Liouville problem with two-point nonlocal boundary condition"
- *MMA2013*, Tartu, Estija, 2013 m. gegužės 27–30 d.

  "Investigation of eigenvalues for stationary problem with two Bicadze–Samarskii type nonlocal boundary conditions"
- *MMA2012*, Talinas, Estija, 2012 m. birželio 6–9 d.

  "Investigation of complex eigenvalues for stationary problems with two-point nonlocal boundary condition"
- *MMA2011*, Sigulda, Latvija, 2011 m. gegužės 25–28 d.

  "Investigation of Complex Eigenvalues for Stationary Problem with Two-Point Nonlocal Boundary Conditions"
- *MMA2010*, Druskininkai, Lietuva, 2010 m. gegužės 26–29 d.

  "Investigation of Complex Eigenvalues for Stationary Problem with Nonlocal Boundary Conditions"

  "Investigation Discrete Sturm–Liouville problem with Nonlocal Boundary Condition"

ir kiti rezultatai pristatyti "Lietuvos matematikų draugijos" konferencijose (LMD) ir "Matematikos ir matematinio modeliavimo (MMM)" konferencijose:

- *LMD*, Kaunas, Lietuva, 2018 m. birželio 18-19 d. "Investigation of Spectrum Curves for a Sturm–Liouville Problem with Two-Point Nonlocal Boundary Conditions"
- *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2017 m. birželio 21-22 d. "Investigation of spectrum curves for Sturm–Liouville problem with two-point nonlocal boundary condition"
- *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2014 m. birželio 26–27 d. "The dynamics of Sturm—Liouville problem's with integral BCs bifurcation points"
- *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2013 m. birželio 19–20 d. "Inverstigation of the spectrum for Sturm–Liouville problems with a nonlocal boundary condition"
- *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2011 m. birželio 16-17 d. "Investigation of complex eigenvalues for a stationary problem with two-point nonlocal boundary condition"
- *LMD*, Šiauliai, Lietuva, 2010 m. birželio 17-18 d. "Investigation of complex eigenvalues for a stationary problem with two-point nonlocal boundary condition"
- *MMM2010*, Kaunas, Lietuva, 2010 m. birželio 8–9 d. "Investigation Sturm—Liouville problems with two-point nonlocal boundary condition"
- *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2009 m. birželio 18–19 d. "Investigation of complex eigenvalues for stationary problems with nonlocal boundary condition"
- *MMM2009*, Kaunas, Lietuva, 2009 m. balandžio 2–3 d. "Investigation of complex eigenvalues for Sturm—Liouville problems with nonlocal two-point boundary condition

Stažuotės: Doktorantūros studijose buvo plečiamos matematinės žinios vasaros mokykloje "JISD2014", Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Ispanija, 2014 m. birželio 16–20,.

7 Publikacijų sąrašas

Disertacijos rezultatai publikuoti 6 moksliniuose straipsniuose:

[**A1**] **Kristina Bingelė**, Agnė Bankauskienė, Artūras Štikonas. Investigation of spectrum curves for the Sturm–Liouville problem with two-point nonlocal boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **25**(1):53–70, 2020. https://doi.org/10.3846/mma.2020.10787.

[**A2**] **Kristina Bingelė**, Agnė Bankauskienė, Artūras Štikonas. Spectrum Curves for a discrete Sturm–Liouville problem with one integral boundary condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **24**(5):755–774, 2019. https://doi.org/10.15388/NA.2019.5.5.

[**A3**] Agnė Skučaitė, **Kristina Skučaitė-Bingelė**, Sigita Pečiulytė, Artūras Štikonas. Investigation of the spectrum for the Sturm–Liouville problem with one integral boundary condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **15**(4):501-512, 2010. https://doi.org/10.15388/NA.15.4.14321.

[A4] **Kristina Skučaitė-Bingelė**, Artūras Štikonas. Inverstigation of the spectrum for Sturm-Liouville problems with a nonlocal boundary condition. *Liet. Matem. Rink. Proc. LMR*, Ser. A, **54**:73–78, 2013. https://doi.org/10.15388/LMR.A.2013.16.

[A5] **Kristina Skučaitė-Bingelė**, Artūras Štikonas. Investigation of complex eigenvalues for a stationary problem with two-point nonlocal boundary condition. *Liet. Matem. Rink. LMD darbai*, **52**:303–308, 2011. https://doi.org/10.15388/LMR.2011.sm04.

[A6] **Kristina Skučaitė-Bingelė**, Sigita Pečiulytė, Artūras Štikonas. Investigation of Complex Eigenvalues for Stationary Problem with Two-Points Nonlocal Boundary Condition. *Mathematics and Mathematical Modelling*, 5:24–32, 2009.

8 Išvados

Doktorantūros studijų Vilniaus universitete metu tirtas Šturmo ir Liuvilio uždavinys su viena klasikine ir antrąja nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga. Iš disertacijoje gautų rezultatų galime daryti tokias išvadas:

- Pirmajame disertacijos skyriuje ištirta Šturmo ir Liuvilio uždavinio su viena klasikine (Dirichlė tipo taškine sąlyga) ir antrąja nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga spektro priklausomybė nuo dviejų parametrų γ and ξ. Priklausomybė nuo parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ aprašoma charakteristine funkcija srityje $\mathbb{C}_q$. Nustatėme ypatingus šios meromorfinės funkcijos taškus: nulius, polius, kritinius taškus ir pastoviųjų tikrinių reikšmių taškus. Radome charakteristinės funkcijos pirmosios ir antrosios išvestinės reikšmes pastoviųjų tikrinių reikšmių taškuose ir šakojimosi taške $q = 0$. Gavome naujų Šturmo ir Liuvilio uždavinio kompleksinės spektro dalies rezultatų.

- Fiksuotam parametrui ξ nelokaliosiose kraštinėse sąlygose spektriniai taškai aprašo spektrines kreives. Kiekviena spektrinė kreivė yra spektrinio taško trajektorija srityje $\mathbb{C}_q$. Spektrinės kreivės gali būti reguliariosios ($\gamma \in \mathbb{R}$), pusiau reguliariosios $\gamma \in (0, +\infty)$ ir nereguliariosios (pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai).

- Bendras spektrinių kreivių vaizdas (spektrinė sritis) priklauso nuo parametro ξ. Bifurkacijos taškuose spektrinių kreivių vaizde įvyksta kokybinis pokytis. Nustatėme nagrinėto Šturmo ir Liuvilio uždavinio bifurkacijų tipus.

- Antrajame skyriuje ištirti Šturmo ir Liuvilio uždaviniai su kitomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis: tyrėme du

Šturmo ir Liuvilio uždavinius su viena klasikine Dirichlė tipo taškine sąlyga ir dvitaške nelokaliąja kraštine sąlyga, keturis Šturmo ir Liuvilio uždavinius su viena klasikine Neimano tipo kraštine sąlyga ir dvitaške kraštine sąlyga ir Šturmo ir Liuvilio uždavinį su simetrine nelokaliąja sąlyga. Visais atvejais gavome panašius rezultatus, kaip ir nagrinėdami Šturmo ir Liuvilio uždavinį pirmajame disertacijos skyriuje.

- Trečiajame skyriuje ištirtas diskrečiųjų Šturmo ir Liuvilio uždavinių spektras: tyrėme du diskrečiuosius Šturmo ir Liuvilio uždavinius su viena klasikine Dirichlė tipo taškine sąlyga ir antrąja nelokaliąja dvitaške arba tritaške nelokaliąja kraštine sąlyga, du diskrečiuosius Šturmo ir Liuvilio uždavinius su viena klasikine Neimano tipo kraštine ir dvitaške arba tritaške taškine nelokaliąja kraštine sąlyga. Diskretusis Šturmo ir Liuvilio uždavinys priklauso nuo papildomo parametro h. Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio charakteristinė funkcija apibrėžta srityje $\mathbb{C}_q^h$ ir ryšys tarp tikrinių reikšmių ir taško $q \in \mathbb{C}_q^h$ yra sudėtingesnis. Diskrečiuoju atveju galime tirti spektrines kreives prie taško $q = \infty$. Nustatyta, kad šis taškas yra arba poliaus taškas, arba pašalinamas singuliarusis taškas. Diskrečiajam Šturmo ir Liuvilio uždaviniui turime du šakojimosi taškus $q = 0$ ir $q = n$. Šiame skyriuje aprašėme naujus rezultatus, gautus tiriant neigiamas ir dideles teigiamas ($\lambda > 4/h^2$) tikrines reikšmes.

9 Summary

In the thesis the spectrum of Sturm–Liouville Problem (SLP) with one classical condition (Dirichlet or Neumann type BC) on the left side of the interval and another different type nonlocal two—point boundary conditions (NBCs) or symmetrical type NC on the right side of the interval is investigated. We obtain general properties of the Characteristic Function and Spectrum Curves for such a problem. In the disertation we consider the following problems:

$$
\begin{aligned}
&-u'' = \lambda u, \quad t \in (0,1), \\
&u(0) = 0 \ \text{ or } \ u'(0) = 0, \\
&u(1) = \gamma u'(\xi) \ \text{ or } \ u(1) = \gamma u'(\xi) \ \text{ or} \\
&u'(1) = \gamma u'(\xi) \ \text{ or } \ u'(1) = \gamma u'(\xi), \ \text{ or } \ u(\xi) = \gamma u(1-\xi),
\end{aligned}
$$

where $\gamma \in \mathbb{R}$ and $\xi \in [0,1]$; and discrete problems:

$$
\begin{aligned}
&\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + \lambda U_j = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \\
&U_0 = 0 \ \text{ or } \ U_1 = U_0, \\
&U_n = \tfrac{\gamma}{2h}(U_{m+1} - U_{m-1}) \ \text{ or } \ U_n = \gamma U_m,
\end{aligned}
$$

where $h = 1/n$, $2 < n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$.

Characteristic Function is used for investigation of the Spectrum Curves for such type of problems. The properties of the Spectrum Curves for such type problems depend on Constant Eigenvalue Points and zeroes, poles, Critical Points of CF. Investigations of real and complex parts of the spectrum are provided with the results of numerical experiments.

For fixed parameter ξ in NBC Spectrum points define the Spectrum Curves. Each Spectrum Curve is the trajectory of a Spectrum Point in domain $\mathbb{C}_q$. We have regular Spectrum Curves

($\gamma \in \mathbb{R}$), semi-regular Spectrum Curves ($\gamma \in (0, +\infty)$) and non-regular Spectrum Curves (Constant Eigenvalues Points).

The global view of Spectrum Curves (Spectrum Domain) depends on parameter ξ. At bifurcation points this view undergoes qualitative changes. We find bifurcation types for these SLP.

Characteristic Function for discrete SLP is defined on domain $\mathbb{C}_q^h$ and a relation between eigenvalues and $q \in \mathbb{C}_q^h$ is more complicated. For discrete case we can investigate Spectrum Curves near point $q = \infty$. This point is either Pole Point or Removable Singularity Point. For dSLP we have two Ramification Points $q = 0$ and $q = n$. We get new results about negative and large positive ($\lambda > 4/h^2$) eigenvalues.

10 Trumpos žinios apie autorę

Gimimo data ir vieta:

1986 m. balandžio 19 d., Prienai.

Išsilavimas:

2005 Šeštokų vidurinė mokykla;

2009 Vytauto Didžiojo universiteto taikomosios matematikos bakalauras;

2010–2011 Vilniaus Edukologijos universitetas, Profesinių kompetencijų tobulinimo institutas, laipsnio nesuteikiančios mokyklinės pedagogikos studijos;

2011 Vytauto Didžiojo universiteto taikomosios matematikos magistras.

Mokslinio darbo patirtis:

2014, 2017 Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas, Skaičiavimo metodų skyrius, jaunesnioji mokslo darbuotoja;

2017–2019 Vilniaus universitetas, Taikomosios matematikos institutas; jaunesnioji mokslo darbuotoja, jaunesnioji asistentė.

Pedagoginio darbo patirtis:

2009 Kauno r. Kulautuvos vidurinė mokykla, matematikos ir informacinių technologijų mokytoja;

2009 Kauno Žaliakalnio pagrindinė mokykla, matematikos mokytoja;

2012–2014 Vilniaus Gedimino technikos universitetas, asistentė.

Kita darbo patirtis:

2013 iki dabar Vtex, elektroninių duomenų redaktorė,

2013–2017 Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas, skaičiavimo metodų skyrius, reikalų tvarkytoja.

Literatūra

[1] S. Pečiulytė and A. Štikonas. Šturmo–Liuvilio uždavinys diferencialiniam operatoriui su viena dvitaške nelokialiąja antrojo tipo kraštine sąlyga. *Liet. Mat. Rink.*, **45**(Special Issue):432–436, 2005. https://doi.org/10.15388/LMR.2005.sm05.

[2] S. Pečiulytė and A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal two-point boundary conditions. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **11**(1):47–78, 2006. https://doi.org/10.15388/NA.2006.11.1.14764.

[3] S. Pečiulytė and A. Štikonas. Distribution of the critical and other points in boundary problems with nonlocal boundary condition. *Liet. Mat. Rink.*, **47**(Special Issue):405–410, 2007. https://doi.org/10.15388/LMR.2007.sm01.

[4] S. Pečiulytė and A. Štikonas. On positive eifgenfunctions of Sturm–Liouville problem with nonlocal two-point boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **12**(2):215–226, 2007. https://doi.org/10.3846/1392-6292.2007.12.215-226.

[5] S. Pečiulytė, O. Štikonienė and A. Štikonas. Investigation of negative critical point of the characteristic function for problems with nonlocal boundary condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **13**(4):467–490, 2008. https://doi.org/10.15388/NA.2008.13.4.14552.

[6] A. Skučaitė and A. Štikonas. Spectrum curves for Sturm–Liouville Problem with Integral Boundary Condition. *Math. Model. Anal.*, **20**(6):802–818, 2015. https://doi.org/10.3846/13926292.2015.1116470.

[7] A. Štikonas. The Sturm–Liouville problem with a nonlocal boundary condition. *Lith.Math.J.*,**47**(3):336–351,2007. https://doi.org/10.1007/s10986-007-0023-9.

[8] A. Štikonas. A survey on stationary problems, Green's functions and spectrum of Sturm–Liouville problem with nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **19**(3):301–334, 2014. https://doi.org/10.15388/NA.2014.3.1.

[9] A. Štikonas and O. Štikonienė. Characteristic functions for Sturm–Liouville problems with nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.*, **14**(2):229–246, 2009. https://doi.org/10.3846/1392-6292.2009.14.229-246.

PASTABOS

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, LT-10222 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 35 egz.