

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Matematikos ir informatikos fakultetas

Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas

MIFODIJUS SAPAGOVAS

**M-MATRICŲ TAIKYMAS ŠIUOLAIKINĖJE SKAITINĖJE
ANALIZĖJE**

Vilnius, 2021

Terminą M-matrica (Minkovskio matrica) pirmą kartą panaudojo A. Ostrovskis 1937m. [1], referuodamas H. Minkovskio 1900m. ir 1907m. straipsnius [2,3], kuriose buvo įrodytos, naudojant dabartinę terminologiją, kai kurios M-matricų savybės. H. Minkovskis (Hermann Minkowski, 1864-1909), vokiečių matematikas ir fizikas, vienas reliatyvumo teorijos pradininkų, gimė Aleksote (dabar Kaunas). Aleksotas tuo metu buvo atskiras miestelis Augustavo, vėliau Suvalkų gubernijoje. 1872m. H. Minkovskis kartu su tėvais persikėlė į Karaliaučių. Iki to mokinosi Kauno gubernijos gimnazijoje (dabar Kauno Maironio universitetinė gimnazija), kurią vėliau, jau būdamas žymiu mokslininku, aplankė 1905m. Be M-matricų, matematikoje ir fizikoje yra gana daug terminų, susijusių su H. Minkovskiu. Garsiausias iš jų yra Minkovskio erdvė (keturmatė erdvė, speciali reliatyvumo teorija, 1908m.) Be to, yra Minkovskio problema (geometrija), Minkovskio nelygybė (integralų teorija), Minkovskio teorema (skaičių geometrija) ir t.t.. Na, o 2018m. atsirado dar vienas terminas – Minkovskio-Alkausko konstanta [4]. Giedrius Alkauskas, m. dr., Lietuvos matematikas, Vilniaus Universiteto dėstytojas. Aleksote yra Hermano ir Oskaro Minkovskių gatvė. Hermano brolis Oskaras – gydytojas ir fiziologas, prisidėjęs prie insulto išradimo, už atradimus cukrinio diabeto srity buvo nominuotas Nobelio premijai.

1. Pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai

Matricų teorijoje daug dėmesio skiriama atskiroms matricų klasėms ar tipams. Viena iš tokių klasių yra teigiamos (neneigiamos) matricos. Šios matricos apibrėžiamos gana paprastai ir suprantamai.

1 Apibrėžimas. n -ios eilės kvadratinė matrica A su realiaisiais elementais a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ yra vadinama teigiama (neneigiama), jei visi jos elementai yra teigiami (neneigiami): $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$).

Teigiamoms (neneigiamoms) matricoms naudosime tokį užrašą: $A > 0$ ($A \geq 0$).

Analogiškas apibrėžimas ir žymėjimai taikomi taip pat ir vektoriams: $x = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Jei $x_i > 0$ ($x_i \geq 0$), tai žymėsime $x > 0$ ($x \geq 0$).

Neneigiamų matricų teorijoje viena pagrindinių yra Perono-Frobenijaus teorema. Prieš ją suformuluojant, pateiksime dar keletą pagalbinių apibrėžimų. Naudosime vienetinio vektoriaus sąvoką, t.y. vektoriaus $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$, kurio i -oji koordinatė lygi 1, o likusios koordinatės lygios nuliui.

2 Apibrėžimas. Matrica P , kurios stulpeliais yra vienetiniai vektoriai, surašyti bet kokia tvarka, yra vadinama perstatinių matrica.

Matrica PAP' yra gaunam iš matricos A , tam tikra tvarka perstatant jos stulpelius ir ta pačia tvarka – eilutes.

3 Apibrėžimas. Matrica A yra redukuojamoji matrica, jei egzistuoja tokia perstatinių matrica P , kad

$$PAP' = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix} \text{ arba } PAP' = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix};$$

čia B ir D yra kvadratinės matricos, kurių eilė yra atitinkamai n_1 ir n_2 ($n_1 + n_2 = n$), C - stačiakampė matrica, O - stačiakampė matrica, kurios visi elementai lygūs nuliui. Priešingu atveju A yra neredukuojamoji matrica.

4 Apibrėžimas. Matricos A spektriniu spinduliu yra vadinama jos tikrinių reikšmių $\lambda(A)$ modulių maksimali reikšmė:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|.$$

Perono-Frobenijaus teorema. Jei $A > 0$ (arba $A \geq 0$ ir A yra neredukuojamoji matrica), tai A turi realiąją teigiamą tikrinę reikšmę, lygia jos spektriniam spinduliui $\rho(A)$;

Tikrinę reikšmę $\rho(A)$ atitinkantis tikrinis vektorius x yra teigiamas: $x > 0$;

$\rho(A)$ padidėja padidinus bent vieną matricos A elementą;

$\rho(A)$ yra paprastoji (nekartotinė) matricos A tikrinė reikšmė.

Šią teoremą įrodė Peronas teigiamoms matricoms [5], o neneigiamoms neredukuojamoms matricoms Perono rezultatą apibendrina Frobenius [6].

Neneigiamos matricos yra svarbios daugelyje mokslo ir technikos sričių: tikimybių teorijoje, statistikoje, lošimų teorijoje, ekonomikoje (skyrium imant, Leonjevo ekonominės sistemos balanso modelis) ir t.t.

Šioje apžvalgoje yra nagrinėjama matricų klasė, tiesiai susijusi su neneigiamomis matricomis. Tiksliau galima taip pasakyti: čia nagrinėjamos matricos pasižymi ta savybe, kad jų atvirkštinė yra neneigiama matrica.

Pateiksime vieną iš daugelio čia nagrinėjamų M-matricų apibrėžimų.

5 Apibrėžimas. Matrica A yra vadinama M-matrica, jei ją galima užrašyti pavidalu

$$A = sI - B,$$

kuriame $B \geq 0$, I - vienetinė matrica, $s \geq \rho(B)$.

Daugelyje literatūros šaltinių toks M-matricos apibrėžimas laikomas vienu iš pagrindinių apibrėžimų. Iš šio apibrėžimo iškart matoma viena iš svarbiausių M-matricų savybių: $a_{ij} \leq 0, i \neq j$. Tačiau šiame apibrėžime neatskleidžiamas M-matricų ryšys su neneigiamomis matricomis. Žemiau pateikiamas kitas ekvivalentus M-matricų apibrėžimas atskleidžias šį sąryšį.

6 Apibrėžimas. Matrica A yra vadinama M-matrica, jei $a_{ij} \leq 0, i \neq j$ ir egzistuoja A^{-1} , kuriai teisinga nelygybė $A^{-1} \geq 0$, t.y. A^{-1} yra neneigiamą matrica.

Dar vienas M-matricos apibrėžimas yra susijęs su matricos spektro struktūra.

7 Apibrėžimas. Matrica A yra vadinama M-matrica, jei $a_{ij} \leq 0, i \neq j$ ir visoms matricos A tikrinėms reikšmėms yra teisinga nelygybė $\operatorname{Re} \lambda(A) > 0$.

Monografijoje [7] yra pateikta 50 ekvivalenčių M-matricos apibrėžimų. Jų visuma sudaro svarbų rinkinį M-matricų savybių. Absoliuti dauguma šių apibrėžimų formuluojami analogiškai 6 ir 7 apibrėžimams, t.y. apibrėžimuose išreikštai nurodoma viena iš M-matricų savybių: $a_{ij} \leq 0, i \neq j$. Matricos turinčios savybę $a_{ij} \leq 0, i \neq j$, yra vadinamos Z-matricomis.

Nagrinėjant M-matricų spektro struktūrą, svarbus vaidmuo tenka Perono-Frobenijaus teoremai.

M-matricų teorija intensyviai buvo plėtojama 20 amžiaus viduryje ir antroje pusėje. Buvo išleista keletas rimtų monografijų apie M-matricų savybes [7,8,9,10]. Visose šiose monografijose nagrinėjami ir M-matricų taikymai elipsinio ir parabolino tipo lygtims (baigtinių skirtumų, baigtinių elementų ar tiesių skaitiniai metodai). Ypač plačiai diferencialinių lygčių tematika nagrinėjama [8] ir [10] monografijose, skyrium imant, iteraciniai metodai skirtuminių lygčių sistemoms spręsti.

Tačiau, analizuojant pirmuosius mokslinius rezultatus, gautus taikant M-matricų teoriją diferencialinėms lygtims spręsti, verta atkreipti dėmesį į vieną esminį aspektą. Pirmieji M-matricų taikymai diferencialinėms lygtims su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis (Dirichle ar Neimano) buvo paprastai susiję su tais atvejais, kai skirtuminių lygčių sistemos matrica yra arba simetrinė arba diagonaliai vyraujanti. Šiais atvejais M-matricų teorija neturėjo esminių privalumų lyginant su kitomis skirtuminio uždavinio tyrimo metodikomis. Esmė ta, kad M-matricų visos savybės

nesiejamos nei su matricos simetriškumu, nei su diagonaliniu vyravimu. Nei vienam M -matricos apibrėžime nereikalaujama, kad matrica būtų simetrinė ar diagonaliai vyraujanti.

Per paskutinius kelis dešimtmečius diferencialinių lygčių teorijoje ir skaitiniuose methoduose intensyviai nagrinėjami uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis. Tai moderni šiuolaikinė kryptis. Uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis yra labai būdingas vienas požymis – tiek diferencialinio, tiek skirtuminio operatoriaus spektras yra žymiai sudėtingesnis ir kartu turiningesnis, lyginant su uždaviniais su klasikinėmis Dirichle ar Neimano kraštinėmis sąlygomis. Ir, būtent, čia M -matricų teorija ir sudarė galimybę gauti naujus rezultatus konkurencijoje su kitomis metodikomis.

Laisvai interpretuojant situaciją diferencialinių lygčių skaitiniuose methoduose, galima teigti, kad M -matricų teorija laukė savo eilės, iki pasirodys uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis. Su nelokaliais uždaviniais M -matricų teorija (arba metodika) gavo naują impulsą tolesniam plėtojimui.

Šios apžvalgos tikslas yra apžvelgti, ką naujo davė M -matricų teorija šiuolaikiniuose skaitiniuose methoduose per paskutinius du dešimtmečius.

Ši apžvalga apima darbų ciklą [11-18].

2 skyriuje nagrinėjamas M -matricų vaidmuo įrodant iteracinių metodų skirtuminių lygčių sistemai konvergavimą. 3 skyriuje aptariami baigtinių skirtumų metodo konvergavimo klausimai elipsinėms ir parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis. Išvadose pateikiama asmeninė autoriaus nuomonė gali paskatinti tolesnę mokslinę diskusiją.

2. M -matricos ir iteraciniai metodai

Šiame skyriuje aptariami nauji moksliniai rezultatai apie netiesinių skirtuminių lygčių sistemų, aproksimuojančių dvimatę elipsinę netiesinę lygtį su integralinėmis sąlygomis, iteracinius sprendimo metodus [10, 11, 12, 16, 17].

Pirmiausia, pateiksime ir aptarsime vieną M -matricų savybę, susijusią su M -matricų taikymu tiesinių algebrinių lygčių sistemoms spręsti iteraciniais metodais.

Užrašykime M-matricą A dviejų matricų M ir $-N$ suma.

$$A = M - N.$$

8 Apibrėžimas. Jei egzistuoja M^{-1} ir $M^{-1} \geq 0$, $N \geq 0$, tai lygybė

$$A = M - N \tag{2.1}$$

yra vadinama M-matricos A reguliariuoju skaidiniu (regular splitting).

Reguliarus skaidinys vaidmuo iteraciniuose methoduose nusakomas gana paprastai. Būtent, jei $A = M - N$ yra reguliarusis skaidinys, tai lygčių sistemai

$$Ax = f$$

iteracinis metodas

$$Mx^{k+1} = Nx^k + f \tag{2.2}$$

arba

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}f$$

konverguoja.

Šis tvirtinimas įrodomas, remiantis Perono-Frobenijaus teorema [7]. Būtent, įrodoma, kad neneigiamai matricai $M^{-1}N$

$$\rho(M^{-1}N) < 1,$$

jei A yra M-matrica. Tokia metodika buvo aprašyta ir taikyta tiesinių skirtuminių lygčių sistemoms, gautoms sprendžiant tiesinę elipsinę lygtį su Diricle kraštine sąlyga [7-10].

Darbų cikle [11-13, 17, 18], remiantis M-matricų teorija, iteracinių metodų konvergavimas įrodytas ne tik tiesinėms, bet taip pat ir netiesinėms skirtuminėms sistemoms.

Vienas iš tipinių uždavinių, nagrinėtų straipsniuose [12, 13, 17, 18] yra toks. Sprendžiame dvimatę netiesinę elipsinę lygtį

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u) \quad (2.3)$$

srityje $(x, y) \in \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ su nelokaliosiomis sąlygomis

$$u(0, y) = \int_0^1 \alpha(x) u(x, y) dx + \mu_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2.4)$$

$$u(1, y) = \int_0^1 \beta(x) u(x, y) dx + \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2.5)$$

ir Dirichle kraštinėmis sąlygomis likusioje srities Ω kontūro dalyje

$$u(x, 0) = \mu_3(x), \quad u(x, 1) = \mu_4(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.6)$$

Diferencialinis uždavinys (2.3)-(2.6) aproksimuojamas skirtuminių lygčių sistema tokiu būdu:

$$\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij} = f_{ij}(u_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.7)$$

$$u_{0j} = h \left(\frac{\alpha_0 u_{0j} + \alpha_N u_{Nj}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i u_{ij} \right) + \mu_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.8)$$

$$u_{Nj} = h \left(\frac{\beta_0 u_{0j} + \beta_N u_{Nj}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i u_{ij} \right) + \mu_{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.9)$$

$$u_{i0} = \mu_{3i}, \quad u_{iN} = \mu_{4i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.10)$$

Čia, kaip paprastai, pažymėta

$$\delta_x^2 u_{ij} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2}, \quad \delta_y^2 u_{ij} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2},$$

$h = \frac{1}{N}$, N - sveikas teigiamas skaičius.

Netiesinių skirtuminių lygčių sistemoje (2.7)-(2.10) yra $(N-1)(N+1)$ lygčių ir tiek pat nežinomųjų u_{ij} , $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, N-1$.

Kad šiai sistemai galėtume taikyti M-matricų teoriją, užrašykime ją kitu pavidalu. Tuo tikslu, kiekvienai reikšmei $j=1,2,\dots,N-1$ lygtis (2.8) ir (2.9) galima interpretuoti kaip dviejų lygčių sistemą su nežinomaisiais u_{0j} ir u_{Nj} . Išreiškime šiuos du nežinomuosius u_{0j} ir u_{Nj} likusiais nežinomaisiais u_{ij} , $i=1,2,\dots,N-1$:

$$u_{0j} = h \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\alpha}_i u_{ij} + \tilde{\mu}_{1j}, \quad (2.11)$$

$$u_{Nj} = h \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\beta}_i u_{ij} + \tilde{\mu}_{2j}, \quad (2.12)$$

čia $\tilde{\alpha}_i$ ir $\tilde{\beta}_i$ yra tam tikros koeficientų α_i ir β_i išraiškos (žr., pvz. [19]). Įrašę šias u_{0j} ir u_{Nj} išraiškas į (2.7) lygtis, kai $i=1$ ir $i=N-1$, gauname

$$\frac{h \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\alpha}_i u_{ij} - 2u_{1j} + u_{2j}}{h^2} + \delta_y^2 u_{1j} = f_{1j}(u_{1j}), \quad j=1,2,\dots,N-1, \quad (2.13)$$

$$\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij} = f_{ij}(u_{ij}), \quad i=2,3,\dots,N-2; \quad j=1,2,\dots,N-1, \quad (2.14)$$

$$\frac{u_{N-2,j} - 2u_{N-1,j} + h \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\beta}_i u_{ij}}{h^2} + \delta_y^2 u_{N-1,j} = f_{N-1,j}(u_{N-1,j}), \quad j=1,2,\dots,N-1, \quad (2.15)$$

su Dirichle sąlygom (2.10). Taip $(N-1)(N+1)$ eilės lygčių sistema transformuojama į $(N-1)^2$ eilės lygčių sistemą (2.13)-(2.15), (2.10) ir į išreikštines formules (2.11), (2.12).

Dabar teorinis lygčių sistemos (2.7) - (2.10) tyrimas yra pakeistas sistemos (2.13) – (2.15), (2.10) tyrimu. Tokia sistemos transformacija yra pakankamai paprasta ir gali pasirodyti nepakankamai reikšminga. Tačiau visa esmė ir glūdi šioje transformacijoje. Sistemai (2.13)-(2.15) jau galima taikyti M-matricų teoriją, ko negalima buvo atlikti pradinei sistemai (2.7)-(2.10). Ši išvada nepriklauso nuo to, ar sistema (2.7)-(2.10) yra tiesinė ar netiesinė.

Pirmą kartą dvimatei lygčiai tokia lygčių transformacija buvo pritaikyta, tikriausiai, straipsnyje [19], o vienamačiu atveju – straipsnyje [20].

Naujoji lygčių sistema gali būti užrašyta matriciniu pavidalu

$$Au + f(u) = \varphi$$

arba

$$\Lambda u - Cu + f(u) = \varphi. \quad (2.16)$$

Čia Λ yra $(N-1)^2$ -ios eilės kvadratinė matrica, atitinkanti skirtuminį operatorių $-\delta_x^2 - \delta_y^2$ stačiakampėje srityje su Dirichlė homogeninėmis kraštinėmis sąlygomis. Matrica C sudaryta tik iš koeficientų α_i, β_i . Kitaip tariant, skirtuminių lygčių sistemoje yra atskiri trys dėmenys, atitinkantys tiesinės diferencialinės lygties išraiškas (Λu), nelokaliąsias sąlygas (Cu) ir netiesinį diferencialinės lygties narį ($f(u)$).

Išnagrinėjus matricos $\Lambda - C$ spektro struktūrą [12, 13, 17, 19, 20], galima sudaryti įvairius skirtingus reguliariusius skaidinius. Atkreipiame dėmesį į tą faktą, kad dėl sistemos netiesiškumo reguliariusius skaidinius reikia sudaryti ne matricai $A = \Lambda - C$, bet matricai

$$\tilde{A} = \Lambda - C + D_k, \quad (2.17)$$

kurioje D_k yra diagonalinė matrica su diagonaliniais elementais

$$d_{ii}^k = \frac{\partial f(u_{ii}^k)}{\partial u}.$$

Kiekvienam reguliariajam skaidiniui

$$\tilde{A} = M - N,$$

$M^{-1} \geq 0$, $N \geq 0$, atitinka vis kitoks iteracinis metodas. Iteracinio metodo konvergavimas įrodomas remiantis M-matricų metodologija. Pastebime, kad M ir N priklauso, bendru atveju, nuo matricų Λ , C ir D_k .

Iteracinių metodų konvergavimo greičiai gali būti įvertinti pagal sekančią M-matricų savybę.

2 Teorema. Imkime M-matricos A du reguliariusius skaidinius:

$$A = M_1 - N_1, \quad M_1^{-1} \geq 0, \quad N_1 \geq 0,$$

$$A = M_2 - N_2, \quad M_2^{-1} \geq 0, \quad N_2 \geq 0,$$

ir jiems atitinkančius iteracinius metodus

$$M_1 x^{k+1} = N_1 x^k + f, \quad (2.18)$$

$$M_2 x^{k+1} = N_2 x^k + f. \quad (2.19)$$

Jei $N_1 \leq N_2$, be to, $N_1 \neq N_2$, tai

$$\rho(M_1^{-1}N_1) < \rho(M_2^{-1}N_2) < 1.$$

Kitaip tariant, mažinant matricos N elementus reguliariame skaidinyje, iteracinis metodas konverguoja greičiau.

Nurodysime keletą išnagrinėtų straipsniuose [12, 13, 17] iteracinių metodų.

1 Metodas. Regularusis skaidinys $\tilde{A} = M - N$,

$$M = \Lambda + D_k, \quad N = C$$

nusako tokį iteracinį metodą

$$\Lambda u^{k+1} + f(u^{k+1}) = Cu^k + \varphi. \quad (2.20)$$

Kiekviename iteracijos žingsnyje (t.y. turime u^k reikia rasti u^{k+1}) tenka spręsti netiesinį dvimatį uždavinį su Dirichle kraštinėmis sąlygomis.

2 Metodas. Regularusis skaidinys $\tilde{A} = M - N$,

$$M = \Lambda - C + \beta I, \quad N = -D_k + \beta I$$

(čia β yra konstanta tokia, kad $0 < \alpha \leq \frac{\partial f(u)}{\partial u} \leq \beta < \infty$).

Iteracinis metodas

$$\Lambda u^{k+1} - Cu^{k+1} + \beta u^{k+1} = -f(u^k) + \beta u^k + \varphi. \quad (2.21)$$

Kiekviename iteracijos žingsnyje tenka spręsti tiesinį dvimatį uždavinį su nelokaliąja sąlyga.

3 Metodas. Regularusis skaidinys $\tilde{A} = M - N$,

$$M = \Lambda + \beta I, \quad N = C - D_k + \beta I,$$

β apibrėžta 2 Metode. Iteracinis metodas

$$\Lambda u^{k+1} + \beta u^{k+1} = Cu^k - f(u^k) + \beta u^k + \varphi. \quad (2.22)$$

Kiekviename iteracijos žingsnyje tenka spręsti tiesinį dvimatį uždavinį su Dirichle kraštine sąlyga.

4 Metodas. Pažymėkime

$$\Lambda u = \Lambda_x u + \Lambda_y u = -\delta_x^2 u - \delta_y^2.$$

Regularusis skaidinys $\tilde{A} = M - N$,

$$M = \Lambda_x - C + \beta I, \quad N = -\Lambda_y - D_k + \beta I.$$

Iteracinis metodas

$$\Lambda_x u^{k+1} - Cu^{k+1} + \beta u^{k+1} = -\Lambda_y u^k - f(u^k) + \beta u^k + \varphi. \quad (2.23)$$

Kiekviename iteracijos žingsnyje tenka spręsti tiesinį vienamątį uždavinį (lygčių sistemos eilė ne $(N-1)^2$, bet $N-1$) su nelokaliosiomis sąlygomis.

Naudojant M-matricų metodą, galima sudaryti ir daugiau skirtingų iteracinių metodų.

Šių metodų konvergavimas kai $\beta(x) = 0$, o $\alpha(x) = \text{const}$ arba $\alpha(x) \geq 0$ ir

$$\int_0^1 \alpha(x) dx \leq \rho < 1 \quad (2.24)$$

nagrinėtas straipsniuose [12, 13]. Straipsnyje [17] išnagrinėtas kintamųjų koeficientų $\alpha(x) \geq 0$, $\beta(x) \geq 0$ atvejis. Šie taikymai toliau plėtojami straipsnyje [18], teorinius tyrimus papildant skaitinio eksperimento rezultatais.

Vadovėlyje magistrantams [11] iteraciniai metodai nagrinėjami tuo atveju, kai vietoje nelokalųjų integralinių sąlygų, diferencialinio uždavinio formulavime imama Bitsadzė-Samarskio nelokalioji sąlyga pavidalo

$$u(x, y) = \gamma u(\xi, y) + \mu_4(y), \quad 0 < \xi < 1, \quad (2.15)$$

γ - duotas realus parametras.

3. M-matricos ir skirtuminių schemų konvergavimas

Šiame skyriuje aptarsime baigtinių skirtumų metodo konvergavimą elipsinėms ir parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis ir M-matricų vaidmenį, nagrinėjant šią problemą.

Diferencialinėms lygtims su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis (Dirichle ar Neimano) labai dažnai, bent jau paprasčiausiais atvejais, baigtinių skirtumų metodo konvergavimas buvo įrodomas „geriausioje“ normoje, t.y. C normoje (kitaip maksimumo normoje):

$$\|u\|_C = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|;$$

Čia u yra vektorius su koordinatėmis u_i . Be to, įrodymai buvo pateikiami esant pakankamai bendroms sąlygoms, kitaip sakant, apribojimai buvo siejami su uždavinio specifika, o ne su metodo ypatumais. Kaip pasekmė, nestacionariems uždaviniams baigtinių skirtumų metodo konvergavimas buvo charakterizuojamas principu: iš aproksimavimo ir stabilumo išplaukia konvergavimas. Ir paprastai, kaip minėta, aproksimavimo ir stabilumo įverčiai buvo gaunami C normoje (žr., pvz., [21]).

Tačiau uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis teoriniai baigtinių skirtumų metodo tyrimai, bent jau pradžioje, vyko ne taip sklandžiai. Vieną tyrimų kryptį charakterizuosime, pateikdami vienamątę parabolinę lygtį su integralinėmis sąlygomis kaip tipinį uždavinį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = \int_0^1 \alpha(x) u(x, t) dx + \mu_1(t), \quad (3.2)$$

$$u(1, t) = \int_0^1 \beta(x) u(x, t) dx + \mu_2(t), \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3.4)$$

Tai vienas pirmųjų uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis, kuriems pradėti kurti skaitiniai metodai, pateikiant metodams teorinį pagrindimą. Dauguma pirmųjų teorinių tyrimų buvo susiję su baigtinių skirtumų metodo stabilumu ir konvergavimu normoje C (taip, kaip ir uždaviniams su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis). Štai dalis šių teorinių tyrimų. Dėl paprastumo nenurodome konkretaus metodo pavidalo ar galimo diferencialinės lygties aproksimavimo.

- 1) Skirtuminis metodas tikslumo $O(h^2 + \tau)$ konverguoja normoje C [22] jei

$$\int_0^1 |\alpha(x)| dx \leq \rho < 1, \quad \int_0^1 |\beta(x)| dx \leq \rho < 1. \quad (3.5)$$

- 2) Netiesinei parabolinei lygčiai, kurioje yra narys $F(u)$, skirtuminio metodo konvergavimo normoje C sąlyga yra [23]

$$\int_0^1 \alpha^2(x) dx < 1, \quad \int_0^1 \beta^2(x) dx < 1. \quad (3.6)$$

- 3) Straipsnyje [22] Crank-Nicolson metodo konvergavimo sąlyga kokybiškai racialesnė: apribojimai ne funkcijoms $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ atskirai, o vienoje nelygybėje (mažinant absoliutiniu didumu vieną funkciją, galima didinti kitą):

$$\left(\int_0^1 \alpha^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \beta^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.7)$$

- 4) Straipsnyje [24] konvergavimo prielaida pastebimai bendresnė (silpnesnė, t.y. weaker) negu (3.7)

$$\int_0^1 \alpha^2(x) dx + \int_0^1 \beta^2(x) dx < 2. \quad (3.8)$$

Straipsnyje [25] taip pat naudojama skirtuminės schemos konvergavimo prielaida (3.8).

Skirtuminių schemų konvergavimo analizė pilniau yra atlikta straipsnyje [17]. Iš įvairių autorių gautų pakankamųjų skirtuminės schemos konvergavimo sąlygų galima padaryti išvadą, kad konvergavimo įvodymui (ne konvergavimui, o konvergavimo įrodymui) reikia, kad koeficientų normos erdvėse L_1 ir L_2 būtų maždaug vieneto eilės dydžiai (neviršytų dviejų). O

realiai tokių griežtų apribojimų nereikia. Skaitinis eksperimentas atliktas straipsniuose [18, 26] irgi patvirtina teiginį, kad apribojimai (3.5)-(3.8) dažnai yra gerokai per griežti.

Toliau, užrašykime diferencialiniam uždaviniui (3.1)-(3.4) konkrečią skirtuminę schemą

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = Au^{j+1} + f^{j+1}. \quad (3.9)$$

Atlikus spektrinę šios schemos analizę gauname [8, 19, 27], kad būtinoji ir pakankamoji šios schemos stabilumo sąlyga yra

$$\operatorname{Re} \lambda_k(A) > 0. \quad (3.10)$$

Kitaip tariant, jei sąlyga (3.10) neišpildyta, tai skirtuminė schema yra nestabili bet kurioje vektoriaus normoje. Jei sąlyga (3.10) išpildyta, tai būtinai egzistuoja tokia vektoriaus norma, kurioje skirtuminė schema yra stabili. Tokia išvada seka iš nelygybės $\rho(S) < 1$, kur S yra skirtuminės schemos (3.9), užrašytos standartiniu dvisluoksnės schemos pavidalu matrica:

$$u^{j+1} = Su^j + \tau f^{j+1}, \quad (3.11)$$

$$S = (I + \tau A)^{-1}.$$

Betarpiskai patikriname, kad iš (3.10) nelygybės seka $\rho(S) < 1$.

Taip pavyzdžiui, tuo atveju, kai $\alpha(x) = \alpha = \text{const}$, $\beta(x) = \beta = \text{const}$, stabilumo sąlyga (3.10) tampa tokia [19, 20]:

$$-\infty < \alpha + \beta < 2,$$

o iš sąlygų (3.5)-(3.8) gauname

$$|\alpha| < 1, |\beta| < 1$$

arba

$$\alpha^2 + \beta^2 < 2$$

ir pan.

Iš čia pateiktos skirtuminių schemų stabilumo ir konvergavimo sąlygų analizės galima padaryti išvadą, kad C norma nėra pati tinkamiausia ir informativiausia norma tiriant skirtumines schemas parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis.

Todėl kartu su aukščiau aprašytais darbais [22]-[25] buvo plėtojama kita skirtuminių schemų su nelokaliosiomis sąlygomis tyrimų metodika, naudojant vektorių energetines normas [11, 27]. Čia, tiriant skirtuminių schemų (pavidalo (3.9), (3.11)) stabilumą, naudota norma

$$\|u\|_* = [Du, u]^{1/2}, \quad (3.12)$$

kurio $D = (P^*P)^{-1}$ yra simetrinė teigiamai apibrėžta matrica, P - matrica, kurioje stulpeliais yra matricos A tiesiškai nepriklausomi tikriniai vektoriai.

Pagrindinis normos (3.12) privalumas yra tai, kad matrica norma, suderinta su šia vektorių norma, apibrėžiama gana paprastai ir universaliai:

$$\|S\|_* = \rho(S). \quad (3.13)$$

Komentarus apie šią normą galima rasti [14, 28].

Naudojant vektorių energetinę normą (3.12) ir skirtuminės schemos stabilumo sąlygą $\rho(S) < 1$, pavyko gauti daug naujų rezultatų apie skirtuminių schemų stabilumą parabolinėms ir hiperbolinėms lygtims su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis [14, 18, 27, 28, 29].

Tačiau ir ši metodika pasižymi vienu gana esminiu trūkumu – nebeveikia schema, jog iš aproksimavimo ir stabilumo seka konvergavimas. Esmė ta, kad nėra aišku, ar normos $\|u\|_*$ ir $\|u\|_C$ yra ekvivalenčios, nepriklausomai nuo h .

Nurodžius abiejų metodų privalumus ir pastebėjus jų esminius trūkumus, paprastai iškyla klausimas apie trečio kelio paiešką. Tokią paiešką skatina ir panaši situacija, susidariusi su skirtuminių metodų konvergavimu elipsinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis.

Trumpai paaiškinsime situaciją. Naudojant vektorių ir matricų normas (3.12), (3.13) ir ištyrus skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis spektrą (žr. sąlygą (3.10)), dažnai galima gauti gana bendras (kartais, nepagerinamas ar bent joms artimas) iteracinių metodų konvergavimo sąlygas. Tuo tarpu, skirtuminio metodo konvergavimo sąlygos šioms elipsinėms lygtims yra žymiai griežtesnės (žr. originalius straipsnius [30, 31, 32]) ir jų rezultatų analizę [17]).

Gana dažnai nauja paieška nuveda mus prie šiek-tiek primiršto seno. Mūsų atveju, ieškant trečio kelio skirtuminių metodų konvergavimui tirti uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis, galime grįžti prie metodikos, susijusios su maksimumo principu. Paaiškinsime, grįždami prie skirtuminių lygčių sistemos (2.7), imdami $f = f(x, y)$ ir Dirichle kraštines sąlygas. Užrašykime šią sistemą taip

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.14)$$

$$u_{0j} = \mu_{1j}, \quad u_{Nj} = \mu_{2j}, \quad u_{i0} = \mu_{3i}, \quad u_{iN} = \mu_{4i}; \quad (3.15)$$

arba bendresniu pavidalu

$$Lu_{ij} = A_{ij}u_{ij} - (B_{ij}^1 u_{i-1,j} + B_{ij}^2 u_{i+1,j} + B_{ij}^3 u_{i,j-1} + B_{ij}^4 u_{i,j+1}) = f_{ij}, \quad (3.16)$$

Teorema (maksimumo principas)[21]. Tarkime, kad yra išpildyta nelygybė

$$A_{ij} \geq \sum_{k=1}^N B_{ij}^k, \quad B_{ij}^k \geq 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.17)$$

Jei $Lu_{ij} \leq 0$ ($Lu_{ij} \geq 0$) visiems vidiniams srities Ω taškams $i, j = 1, 2, \dots, N-1$, tai funkcija u_{ij} negali įgyti didžiausios teigiamos (mažiausios neigiamos) reikšmės šiuose vidiniuose taškuose, t.y. didžiausią teigiamą (mažiausią neigiamą) reikšmę u_{ij} įgyja taške ar taškuose i, j , kai $i = 0$ ar $i = N$ arba $j = 0$ ar $j = N$.

Ištikrųjų, svarbus ne tiek šios teoremos teiginys, kiek dvi išvados, susijusios su šia teorema.

1 Išvada. Jei teisinga nelygybė (3.17), tai nehomogeninė lygčių sistema (3.14), (3.15) turi vienintelį sprendinį (jos determinantas nelygus nuliui).

2 Išvada (Palyginimo teorema). Tarkime, kad yra išpildyta nelygybė (3.17). Imkime dviejų sistemų, analogiškų sistemai (3.14), (3.15) sprendinius.

$$Lu_{ij} = f_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.18)$$

$$u_{ij} = \mu_{ij}, \quad i = 0, N \text{ arba } j = 0, N$$

ir

$$L\tilde{u}_{ij} = \tilde{f}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.19)$$

$$\tilde{u}_{ij} = \tilde{\mu}_{ij}, \quad i = 0, N \text{ arba } j = 0, N$$

$\tilde{f}_{ij} \geq 0, \quad \tilde{\mu}_{ij} \geq 0$. Jei

$$|f_{ij}| \leq \tilde{f}_{ij}, \quad |\mu_{ij}| \leq \tilde{\mu}_{ij}, \quad (3.20)$$

tai tada

$$|u_{ij}| \leq \bar{u}_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (3.21)$$

Funkcija $\bar{u}_{ij}$ paprastai vadinama uždavinio (3.18) mažorante.

Palyginimo teoremos svarba pasireiškia tuo, kad paprastai daugeliu atvejų galima taip parinkti $\tilde{f}_{ij}$ ir $\tilde{\mu}_{ij}$, kad sistemos (3.19) sprendinį (t.y. mažorantę) galima nesunkiai rasti. Tuo pačiu turime pradinės sistemos (3.18) sprendinio įvertį.

Tokia metodika praeito šimtmečio viduryje buvo viena pirmųjų ir gana efektyvių skirtuminio metodo paklaidos įvertio metodų.

Tačiau ši metodika visiškai nebuvo taikoma uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis. Viena iš priežasčių (ir, tur būt, svarbiausia) – lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis nelygybė (3.17), kurios prasmė yra skirtuminio uždavinio matricos diagonalus vyravimas, per daug susiaurina nelokalųjų sąlygų pavidalą. Iš esmės skirtuminio uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis matrica, tik išimtiniais atvejais, gali būti simetrinė ar diagonaliai vyraujanti.

Tačiau maksimumo principas visiškai nėra būtinas tam, kad būtų teisinga palyginimo teorema. Sunku pasakyti, kas ir kada pirmasis pastebėjo, kad palyginimo teorema gali būti teisinga, nereikalaudama diagonalaus vyravimo (nelygybė (3.17)). Iki šiol daugiau kaip penkis dešimtmečius vadovėliuose ir monografijose įvairiomis kalbomis palyginimo teorema skirtuminio metodo paklaidai įvertinti buvo formuluojama kaip maksimumo principo išvada.

Straipsnyje [15] įrodyta, kad jei skirtuminių lygčių sistemos (su nelokaliąja sąlyga) matrica yra M-matrica, tai šiai sistemai galima taikyti palyginimo teoremą. Tuo būdu, skirtuminio metodo

paklaidą įvertinti galima, nereikalauiant, kad teisinga maksimumo principą garantuojanti nelygybė (3.17).

Plėtojant M-matricų teorijos taikymą skirtuminiams uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis, palyginimo teoremos analogas be maksimumo principo įrodytas taip pat ir paraboliniams lygtims.

Taip straipsniuose [15, 16], konstruojant specialias mažorantes, skirtuminės schemos paklaidą įvertinta netiesiniam elipsiniam uždaviniui

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u), \quad (x, y) \in D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\},$$

$$u(0, y) = \gamma \int_0^1 u(x, y) dx + \mu_1(x),$$

$$u(1, y) = \mu_2(y), \quad u(x, 0) = \mu_3(x), \quad u(x, 1) = \mu_4(x)$$

ir atitinkamam paraboliniam uždaviniui. Gauti skirtuminių metodų paklaidos $z_{ij} = u_{ij} - U_{ij}$, kur u_{ij} - diferencialinio uždavinio sprendinys $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, U_{ij} - skirtuminio uždavinio sprendinys:

- elipsinei lygčiai

$$\|z_{ij}\|_C = \max_{0 \leq i, j \leq n} |z_{ij}| \leq C_1 h^2,$$

- parabolinei lygčiai

$$\|z_{ij}^n\|_C \leq C_2 h^2 + C_3 \tau,$$

čia C_1 , C_2 ir C_3 yra konstantos, nepriklausančios nuo h ir τ . Šiuose įverčiuose yra apribojimai

$$0 \leq \gamma \leq 2 - \sigma,$$

$\sigma > 0$ - norimai mažas skaičius.

Atkreipiame dėmesį, kad konstantų C_1 , C_2 ir C_3 reikšmės ir apribojimai parametrui γ esminiai priklauso nuo to, kaip sėkmingai buvo parinkta mažoraujanti funkcija $\bar{u}_{ij}$, t.y. skirtuminės

sistemos (3.13) sprendinys. Dabar ruošiami spaudai straipsniai vis su kitomis mažoruojančios funkcijos reikšmėmis, praplečiant nelokaliųjų sąlygų pavidalą.

4. Išvados ir hipotezės

M-matricų teorija, skirtumnio uždavinio spektro struktūros tyrimas ir palyginimo teorema, nesusiejant jos su maksimumo principu atveria naujas galimybes tirti skirtuminio metodo konvergavimą elipsinėms ir parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis. Pagal tokią metodiką pavyko įvertinti baitinių skirtumų metodo paklaidą ir įrodyti metodo konvergavimą kai kurioms silpnai netiesinėms elipsinėms ir parabolinėms lygtims [19, 20]. Tai tik pirmieji rezultatai. Galimybė gauti naujus rezultatus su mažesniais apribojimais nelokaliųjų sąlygų parametrų ar platesnei nelokaliųjų sąlygų klasei čia dar aiškiai neišnaudota. Atskira tyrimų kryptis, gali būti susieta su naujų mažoruojančių funkcijų konstravimu.

Didesnė pažanga yra pasiekta taikant M-matricų teoriją netiesinių skirtuminių lygčių sistemoms spręsti [12, 13, 17, 18]. Pastebėjime, kad jei skirtuminių lygčių sistemos matrica yra M-matrica, tai būtinai egzistuoja bent vienas regliarusis skaidinys, pagal kurį galima sukonstruoti konverguojantį iteracinį metodą. Tokiu universaliu skaidiniu yra

$$A = SI - B$$

(žr. 5 Apibrėžimas). Atviras klausimas yra geriausio (ir kokia prasme geriausio?) metodo suradimas.

Analogikai galima suformuluoti klausimą skirtuminių metodų paklaidos įvertimo išvedimo tematikoje. Čia galima būtų suformuluoti hipotezę (ją reikėtų patikslinti). Jei skirtuminių lygčių sistemos matrica yra M-matrica, tai metodo paklaidai įvertinti visuomet galima taikyti palyginimo teorema, parenkant tinkamą mažoruojančią funkciją. Palyginimo teorema, kai sistemos matrica yra M-matrica, galima taikyti visuomet, bet neaišku, ar visuomet mažorantė suteiks mums prasmingą paklaidos įvertį. Taip atsiranda tinkamos mažorantės konstravimo problema.

Ir dar vienas klausimas. Straipsnyje [15], įrodant palyginimo teorema (žr. [15], 6 Lema), ištikrųjų yra įrodytas šiek – tiek bendresnis rezultatas. Naujai suformuluosime, kas ten įrodyta:

6 Lema [15]. Tarkime, kad vektoriai u ir v yra šių algebrinių sistemų sprendiniai

$$Au = f,$$

$$Aw = g.$$

Tarkime, kad $A^{-1} \geq 0$, $g \geq 0$. Jei $|f| \leq g$, tai $|u| \leq w$. Taigi, tam kad palyginimo teorema būtų teisinga, nėra būtina, kad matrica A būtų M-matrica, o užtenka, kad būtų $A^{-1} \geq 0$. Matrices su savybe $A^{-1} \geq 0$ yra vadinamos monotoninėmis matricomis. Tai platesnė matricų klasė negu M-matricos.

Taigi klausimas: ar galima elipsinei lygčiai korektiškai suformuluoti kraštinės nelokaliosios sąlygas tokias, kad atitinkamo skirtuminio uždavinio matrica nebūtų M-matrica, bet būtų monotoninė matrica?

Literatūra

1. A. M. Ostrowski, Über die, Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, *Comment. Math. Helv.*, 1937, **10**, 69-96.
2. H. Minkowski, zur Theorie der Einkerten in den algebraischen Zahlkörper, *Nachr. K. Ges. Wiss. Gött. Math.-Phys. Klasse*, 1900, 90-93.
3. H. Minkowski, *Diophantische Approximationen*, 1907, Teubner, Leipzig.
4. S. R. Finch, Mathematical constants II, *Cambridge University Press, New York*, 2019.
5. O. Perron, Zur Theorie der Matrices, *Math. Ann.*, 1907, **64**, 248-263.
6. G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, 1912, 456-477.
7. A. Berman, R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, *SIAM. Philadelphia*, 1994.
8. R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, *Prentice-Hall, New Jersey*, 1962.
9. V. V. Voevodin, Yu. A. Kuzecov, Matricy i Vychislenija, *Moscow, Nauka*, 1984 (In Russian).
10. G. Windisch, M-matrices in Numerical Analysis, *BSB B. G. Teubner, Leipzig*, 1989.
11. M. Sapagovas, Diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis, *MJJ, Vilnius*, 2007.
12. O. Štikonienė, M. Sapagovas, R. Čiupaila, On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions, *Nonlin. Anal. Model. Control*, 2014, **19**(3), 517-535.

13. M. Sapagovas, V. Griškonienė, O. Štikonienė, Application of M-matrices theory to numerical investigation of a nonlinear elliptic equation with an integral condition, *Nonlin. Anal. Model. Control*, 2017, **22**(4), 489-504.
14. K. Jakubėlienė, R. Čiupaila, M. Sapagovas, Semi-implicit difference scheme for a two-dimensional parabolic equation with an integral boundary condition. *Math. Model. Anal.*, 2017, **22**(5) 617-633.
15. M. Sapagovas, O. Štikonienė, K. Jakubėlienė, R. Čiupaila, Finite difference method for boundary value problem for nonlinear elliptic equation with nonlocal conditions, *Bound. Value Probl.*, 2019, **2019**(94), 1-16.
16. R. Čiupaila, M. Sapagovas, K. Pupalaigė, M-matrices and convergence of finite difference scheme for parabolic equation with an integral boundary condition, *Math. Model. Anal.*, 2020, **25**(2), 167-183.
17. R. Čiupaila, K. Pupalaigė, M. Sapagovas, On the numerical solution for nonlinear elliptic equations with variable weight coefficients in an integral boundary conditions, *Nonl. Anal. Model. Control*, 2021, **26**(4), 738-758.
18. M. Sapagovas, T. Meškauskas, K. Pupalaigė, R. Čiupaila, On the spectrum structure for one difference eigenvalue problem with nonlocal boundary conditions, *Appl. Math. Comput.* (įteikta 2021),
19. M. Sapagovas, On the stability of a finite-difference scheme for nonlocal parabolic boundary-value problems, *Lith. Math. J.*, 2008, **48**(3), 339-356
20. M. Sapagovas, On the stability of finite-difference schemes for one-dimensional parabolic equations subject to integral conditions, *Zh. Vychisl. Prikl. Math. (LVLV)*, 2005, 92, 70-90.
21. A. A. Samarskii, The Theory of Difference Schemes, *Moscow, Nauka*, 1977 (in Russian).
22. G. Ekolis, Finite difference methods for a nonlocal boundary value problem for the heat equation, *BIT*, 1991, **31**, 245-261.
23. G. Fairweather, J. C. López-Marcos, Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions, *Advan. Comput. Math.*, 1996, **6**, 243-262.
24. Y. Liu, Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions, *J. Comput. Appl. Math.*, 1999, **110**, 115-127.

25. B. Bialecki, G. Fairweather, J. C. López-Marcos, The Crank-Nicolson Hermite cubic orthogonal spline collocation method for the heat equation with nonlocal boundary conditions, *Advan. Appl. Math. Mech.*, 2013, **54**, 442-460.
26. M. Sapagovas, T. Meškauskas, F. Ivanauskas, Numerical spectral analysis of a difference operator with non-local boundary conditions, *Appl. Math. Comput.* 2012, **218**, 7515-7527.
27. A. V. Gulin, N. I. Ionkin, V. A. Morozova, Raznostnye schemy dlya nestatsionarnykh nelokal'nykh zadach (Difference schemes for nonstationary nonlocal problems), *Moscow*, 2010.
28. K. Jakubėlienė, M. Sapagovas, On the stability of a difference scheme for a two-dimensional parabolic equation with an integral condition, *Lith. Math. J.*, 2013, **53**(3), 311-323.
29. F. F. Ivanauskas, Yu. A. Novitski, M. P. Sapagovas, On the stability of an explicit difference scheme for hyperbolic equations with nonlocal boundary condition, *Differ. Equat.*, 2013, **49**(7), 849-856.
30. A. Ashyralyev, E. Ozturk, On a difference scheme of second order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary-value problem, *Bound. Value. Probl.*, 2014, **2014**(14), 1-19.
31. G. K. Berikelashvili, On the convergence rate of the finite-difference solution of a nonlocal boundary value problem for a second-order elliptic equation, *Differ. Equat.*, 2003, **39**(7), 945-953.
32. V. A. Il'in, E. I. Moiseev, Two-dimensional nonlocal boundary value problem for Poisson's operator in differential and difference variants, 1990, **2**, 139-156, (In Russian).

Mifodijus Sapagovas. M-matricų taikymas šiulaikinėje skaitinėje analizėje (Application of M-matrices in the modern numerical analysis). Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Vilnius, 2021, 23 psl.

Darbe pateikta M-matricų teorijos taikymo diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis skaitiniam sprendimui, 7 straipsnių darbų ciklo apžvalga. Ciklo sstraipsnių bendraautoriai yra Lietuvos matematikai. Detaliau aptarti du klausimai:

- M-matricų taikymas netiesinių skirtuminių lygčių sistemų, aproksimuojančių elipsinę lygtį su integralinėmis kraštinėmis sąlygomis, iteracinių metodų konvergavimui tirti;
- M-matricų taikymas skirtuminių schemų, aproksimuojančių elipsinę ar parabolinę lygtį su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis, konvergavimui tirti.

Apžvalga užbaigiama trumpai išdėstyta motyvuota autoriaus nuomone apie šios krypties mokslinių tyrimų tolesnę plėtojimą.