

Netiesinės elipsinės lygtys: skaitiniai metodai ir taikymai

Mifodijus Sapagovas 

Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Vilniaus universitetas

Akademijos 4, Vilnius

El. paštas: mifodijus.sapagovas@mif.vu.lt

Santrauka. Apžvalgoje analizuojama, kokie moksliniai rezultatai buvo gauti Lietuvoje, sprendžiant netiesines elipsines lygtis. Aptariamas glaudus ryšys tarp mokslinių tyrimų ir praktinių uždavinių sprendimo. Plačiau nagrinėjama minimalaus paviršiaus lygtis ir minimalių paviršių taikymai.

Įvadas

Netiesinių elipsinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai yra viena pirmųjų skaičiavimo matematikos mokslinių tyrimų krypčių pokario Lietuvoje. Taip jau sutapo, kad šie moksliniai tyrimai prasidėjo 1965 m., šio straipsnio autoriui grįžus į Vilnių iš Kijevo po aspirantūros studijų Ukrainos MA Matematikos institute. Apgintos fizikos-matematikos mokslų kandidato (dabar daktaro) disertacijos tema „Kvazitiesinių elipsinių lygčių su divergentine pagrindine dalimi sprendimas baigtinių skirtumų metodu“. (Vadovas doc. V. Šamanskis).

Pirmasis skaitinių metodų mokslinis padalinys buvo įkurtas dabartiniame VU Matematikos ir informatikos fakulteto Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institute (tuometinis pavadinimas – Lietuvos MA Fizikos ir matematikos institute). Šiame straipsnyje, remdamasis paskutiniųjų 50–60 metų ataskaitomis bei moksliniais straipsniais ir savo patirtimi bei prisiminimais, autorius analizuoja mokslinius rezultatus, gautus netiesinių elipsinių lygčių sprendimo metodų srityje, dažnai pabrėždamas realius ar galimus mokslinių rezultatų taikymus.

Straipsnyje analizuojama, kaip prisilaikant pasaulinės matematikos bendros vystymosi tendencijos, keitėsi elipsinių netiesinių lygčių tematika, kaip buvo pereita prie uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis mokslinių tyrimų. Vienai tyrimų kryptiai – minimalaus paviršiaus lygties skaitiniam sprendimui ir minimalių paviršių taikymams skirta išimtinai daug dėmesio. Minimalaus paviršiaus lygtis, iš tikrųjų yra ypatingas netiesinių uždavinių atstovas. Lėmė šiek tiek ir subjektyvus faktorius – autoriaus moksliniai interesai. Tokių „subjektyvių“ minimalių paviršių tyrimų pasaulinėje literatūroje pasitaiko gana dažnai.

1 Kvazitiesinės elipsinės lygtys. Baigtinių skirtumų metodas

Praeito amžiaus septintame- aštuntame dešimtmečiuose netiesinių elipsinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai buvo viena iš nedaugelio temų, kurias nagrinėjo Lietuvos skaitinių metodų specialistai. Vienas iš būdingų kraštinių uždavinių formuluojamas taip:

rasti lygties

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(\mathbf{x}, u, p_j)) - a_0(\mathbf{x}, u, p_j) = 0, \quad (1)$$

kurioje $p_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$, sprendinį, tenkinantį Dirichle kraštinę sąlygą

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \quad (2)$$

Paprastai, skaitiniuose metoduose priimama prielaida, kad kraštiniam uždaviniui (1)–(2) egzistuoja vienintelis pakankamai glodus sprendinys. Uždaviniui (1)–(2) dar priimama ir kita prielaida, reikalinga skaitiniuose metoduose – tai apibendrinta elipsiškumo sąlyga:

$$\sum_{i,j=0}^2 \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=0}^2 \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

kurioje $p_0 = u$. Nagrinėjant skaitinius metodus, skyrium imant, iteracinių metodų skirtuminių lygčių sistemai konvergavimą, reikalinga dar ir kita prielaida, apie analogišką įvertį iš viršaus.

$$\sum_{i,j=0}^2 \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leq \beta \sum_{i=0}^2 \xi_i^2. \quad (4)$$

Esant šioms prielaidoms paprastai įrodomi pagrindiniai baigtinių skirtumų teiginiai: skirtuminio uždavinio sprendinio egzistencija ir vienatis, baigtinių skirtumų metodo konvergavimas, iteracinių metodų skirtuminių lygčių sistemai konvergavimas. Šios sąlygos, atsižvelgiant į konkrečius lygties atvejus gali būti nežymiai patikslintos. Septintajame-aštuntajame dešimtmečiuose uždavinys (1)–(2) ar jo atskiri atvejai buvo sprendžiami daugelio autorių, esant tam tikrai konkurencijai [1, 2, 5, 6]. Straipsniuose [1, 2] teoriškai baigtinių skirtumų metodas buvo pagrįstas, naudojant monotoninių operatorių teoriją [11], o taip pat remiantis analogija su diferencialiniais operatoriais [4]. Spręskime kraštinį uždavinį (1)–(2) baigtinių skirtumų metodu. Užrašykime gautą netiesinių skirtuminių lygčių sistemą pavidalu

$$\Lambda(u) = 0, \quad (5)$$

čia $u = (u_{ij})$ yra vektorius (detaliau žr. [1]). Vienas iš įrodytų rezultatų yra toks: jei diferencialiniam uždaviniui yra teisingos nelygybės (3), (4) (kitais atvejais skirtuminio uždavinio operatorius yra griežtai monotoninis), tai visuomet lygčių sistemai (5) spręsti egzistuoja konverguojantis iteracinis metodas pavidalo

$$\Delta u^{n+1} = \Delta u^n - \lambda \Lambda(u^n), \quad (6)$$

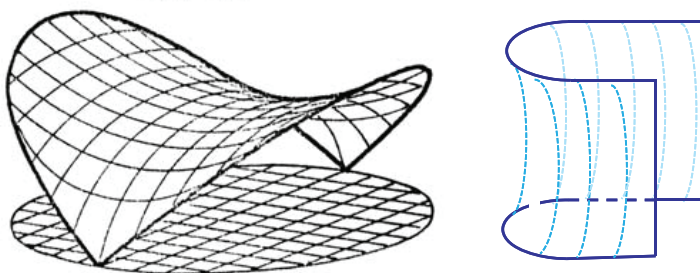
čia Δ – matrica, λ – iteracinis parametras. Vėl gi, principinis rezultatas nepriklauso nuo to, ar operatorius $\Lambda'(u)$ yra simetrinis ar ne.

Išnagrinėtas ir atskiras atvejis, kai diferencialinė lygtis yra silpnai netiesinė

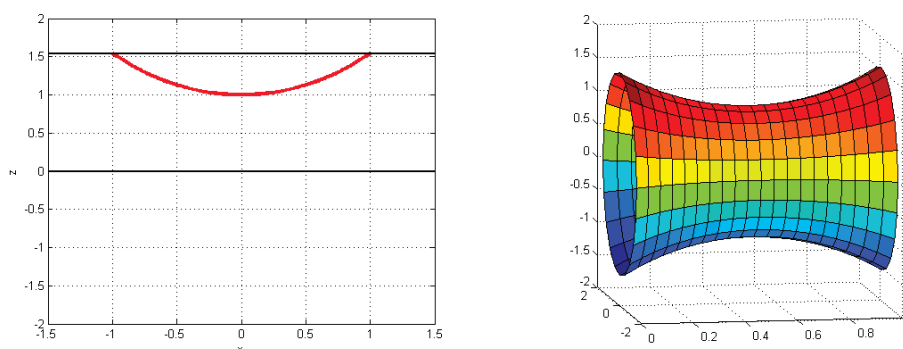
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u) \quad (7)$$

kurioje $\partial f / \partial u \geq 0$.

Taip pat išnagrinėtas tikrinių reikšmių uždavinys dvimačiam diferencialiniam operatoriui [7, 12, 13].



1 pav. Du minimalių paviršių pavyzdžiai: kairėje – balno tipo paviršius, dešinėje – muilo plėvelė ant vielos karkaso



2 pav. Katenoidas. Kairėje – grandininė linija, dešinėje – šios kreivės sukimo apie x ašį rezultatas.

2 Minimalaus paviršiaus lygtis

(1) pavidalo lygtis sutinkama įvairiose fizikos bei technikos srityse. Vienas iš įdomesnių atvejų yra tada, kai ši lygtis turi pakankamai paprastą pavidalą

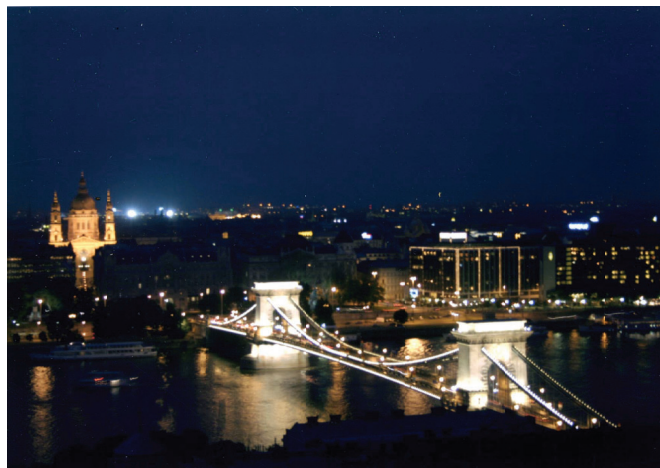
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (8)$$

čia pažymėta

$$\mu(T^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2}}, \quad T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (9)$$

Minimalaus paviršiaus sąvoka matematikoje atsirado XVIII a. viduryje. Žinomas prancūzų matematikas Ž. Lagranžas (J.L. de Lagrange, 1736–1813) nagrinėjo tokį matematinį uždavinį: iš visų paviršių, einančių per duotą erdvinę uždara kreivę, rasti tokį, kurio plotas, apribotas ta kreive, būtų galimai mažiausias. Nagrinėdamas šį uždavinį, jis įrodė, kad jei ieškomas paviršius gali būti užrašytas formule $u = u(x, y)$, tai šis paviršius yra lygties (8) sprendinys. Toks paviršius pavadintas *minimaliu paviršiumi*, o lygtis (8) vadinama *minimalaus paviršiaus lygtimi*.

Minimalių paviršių galima apibrėžti visai kitais terminais: paviršius vadinamas minimaliuoju, jei kiekviename šio paviršiaus taške vidutinis paviršiaus kreivis (kreivumas) yra lygus nuliui. Minimalaus paviršiaus lygtis (8) yra ir sudėtinga ir gana paprasta. Nurodysime kol kas tik vieną minimalaus paviršiaus savybę, dėl ko jo lygtis yra sudėtinga. Jei lygčiai (8) užrašytume nelygybę (3), tai gana nesunku pastebėti,



3 pav. Naktinis Budapeštas. Tiltas per Dunoją, jungiantis Budą ir Peštą. Lynai tarp dviejų pagrindinių atramų yra grandininės linijos formos (nuotrauka nuo Karalių rūmų kalno, 2004 m.)

kad

$$\alpha = \alpha(T^2) \rightarrow 0, \quad \text{kai} \quad T^2 \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Taigi, minimalaus paviršiaus lygtis yra elipsinė, bet nėra tolygiai elipsinė. Apie minimalius paviršius ir lygtį (8) galima prirašyti daug (dažnai elementarių) faktų.

Antai, jei grandininę kreivę

$$y = a \cosh \frac{x}{2} \quad (11)$$

suksime koordinatų plokštumoje apie x ašį, tai gautas sukimosi paviršius yra minimalus. Šis paviršius yra vadinamas *katenoidu*, o kreivė (11) yra vadinama grandinine (2 pav.). Štai dėl ko, pakabinus be galo lanksčią stygą (grandinę) tarp dviejų taškų, esančių vienodame aukštyje, ji įgaus (11) pavidalą. Du grandininės kreivės pavyzdžius matė daugelis iš mūsų. Tai paprasčiausia grandinė tarp dviejų stulpelių mieste užtverianti praeiviams perėjimą neleistinose vietose. Antras pavyzdys – lynai, laikantys pakabinamus tiltus (3 pav.).

Prie minimalių paviršių egzotikos dar grįšime 6 skyriuje. Dabar panagrinėkime, kaip spręsti netiesinę minimalaus paviršiaus lygtį. Iš karto nurodysime vieną esminį sunkumą. Formulės (10) reali pasekmė – negalima teoriškai pagrįsti turimais metodais iteracinių metodų konvergavimo, paklaidos įverčio ir t.t.

Vienas pirmųjų darbų, gal būt, pirmasis kaip reikia spręsti minimalaus paviršiaus lygtį, yra J. Douglas straipsnis [14]. JAV matematikas J. Douglas (1897–1965), vienas žymiausių XX a. minimalių paviršių tyrėjų, 1936 m. už šiuos darbus gavo aukščiausią tarptautinį apdovanojimą matematikams – Fieldso medalį. Keliais dešimtmečiais vėliau minimalaus paviršiaus lygtį sprendė jau keletas autorių [8, 15, 16, 18]. XXI a. prie šio uždavinio sprendimo prisideda vis nauji tyrėjai [7, 19–22]. Daugelyje šių straipsnių autoriai modifikuoja skaitinį algoritmą, tinkantį atveju $\alpha > 0$ taip, kad savybė (10) kaip galima mažiau turėtų įtakos. Iš tikrųjų, taip elgiasi ir straipsnio [8] autoriai, vėliau ir kituose straipsniuose. Vienas iš efektyvių būdų pakoreguoti algoritmą, pasiūlytas N. Uralcevos, yra toks. Apibrėžkime

$$\tilde{T}_{ij}^2 = (\delta_x u_{ij}^2) + (\delta_y u_{ij}^2),$$



4 pav. Vokietijos (VFR) paviljonas pasaulinėje parodoje EXPO-67 (architektas Otto Frei).

čia $\delta_x u_{ij}^2$ ir $\delta_y u_{ij}^2$ yra kurios nors protingai parinktos išvestinių $\partial u / \partial x$ ir $\partial u / \partial y$ taške (i, j) , skirtuminės išraiškos. Tada spęskime tarpinį uždavinį su nauja funkcija

$$\tilde{\mu}(T^2) = \begin{cases} \mu(T^2), & \text{jei } \tilde{T}_{ij}^2 \leq M, \\ \mu(M^2), & \text{jei } \tilde{T}_{ij}^2 \geq M; \end{cases}$$

čia M – iš anksto parinktas pakankamai didelis teigiamas skaičius Minimalaus paviršiaus lygtis, kaip minėjome, yra vienas pakankamai svarbus kvazitiesinės elipsinės lygties (8) atvejis. Kitas atvejis yra kapiliarų uždavinys [24].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = H(x, y, u).$$

Ši lygtis paprastai formuluojama su Neimano kraštine sąlyga. Čia funkcija $H(x, y, z)$ yra vidutinis kreivis (kreivumas). Visumoje šis uždavinys gana artimas minimalaus paviršiaus radimo uždaviniui. Vienas iš uždavinio sprendimo metodų yra aprašytas straipsnyje [23].

3 Lašo laisvojo paviršiaus lygtis

Dar vienas uždavinys vibrotechnikoje yra matematiškai formuluojamas analogiškai kapiliarų problemai. Tai magnetiškai valdomų skysto metalo kontaktų (jungiklių) projektavimas. Tokie kontaktai pasižymi daugeliu privalumų: greitaiegiškumu, aukštu patikimumu, atsparumu vibracijai, ilgaamžiškumu, maža ir stabilia perjungimo varža. Be to, juos paprasta jungti su įvairiais automatikos elementais. Yra keletas skirtingų principų, kaip konstruoti tokius kontaktus. Vienas jų – berezervuariniai kontaktai, patikimai veikiantys bet kurioje erdvinėje padėtyje. Šiuo atveju įjungtas kontaktas yra skysto metalo (pvz., gyvsidabrio) „tiltelis“ tarp dviejų plokštumų. Išjungtas kontaktas yra du lašai, prilipę prie skirtingų plokštumų. Abiem atvejais lašo laisvasis paviršius randamas sprendžiant kraštinį uždavinį netiesinei diferencialinei lygčiai. Diferencialinė lygtis išvedama sutinkamai su bendrosios energijos (skysčio



5 pav. 1972 Miuncheno olimpinis stadionas. By Radox - Own work, Public Domain.
<https://commons.wikimedia.org>

paviršiaus įtempties energijos ir traukos jėgos potencinės energijos sumos) minimumo principo.

Stacionariu atveju naudojami keli matematiniai modeliai. Vienas jų, bene dažniausiai naudojamas, yra skirtas lašo, esančio ant horizontalios plokštumos, paviršiui rasti. Šiuo atveju galima pasinaudoti lašo simetriškumu ir spręsti vienmatę diferencialinę lygtį:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dr} \right)^2}} \frac{du}{dr} \right) - Ku + \lambda = 0, \quad (12)$$

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0, \quad (13)$$

$$2\pi \int_0^R r u dr = V. \quad (14)$$

Čia $u = u(r)$ yra lašo laisvojo paviršiaus lygties polinėje koordinačių sistemoje sprendinys, V – duotas lašo tūris, K – fizikinė konstanta. Nežinomieji yra funkcija $u = u(r)$ ir konstanta λ . Už tai antrosios eilės diferencialinei lygčiai yra ne dvi, o trys kraštinės sąlygos. Tai jau tipiškas diferencialinis uždavinys su nelokaliaja (integraline) sąlyga. Analogiškai formuluojamas ir lašo, esančio ant pasvirusios plokštumos matematinis modelis:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = H(x, y, u), \quad (15)$$

$$u|_F = 0, \quad (16)$$

$$\iint_{\Omega} u dx dy = V, \quad (17)$$

čia $\mu(T^2)$ apibrėžta formule (9), $H(x, y, u) = Ku \cos \alpha - Kx \sin \alpha - \lambda$, α yra plokštumos pasvirimo kampas (detalės ir paaiškinimai yra straipsniuose [25, 26]).



6 pav. Minimalaus paviršiaus formos pastatas (šešialapis dobilas) Valensijoje „Valencia Oceanografic“ (architektas Felix Candela).

Taigi diferencialinė lygtis (12) (ar (15)) labai artima kapiliarų problemos lygčiai. Kitais žodžiais tariant, lašo laisvojo paviršiaus lygtis yra minimalaus paviršiaus tipo lygtis. Tai paaiškinama paprastai – dominuojanti fizikinio reiškinių energija yra skysčio paviršiaus įtempies energija.

Bet yra esminė naujovė lašo laisvojo paviršiaus radimo uždaviniuose. Tai nelokalioji sąlyga (14) ar (17). Taip Lietuvos skaitinių metodų atstovai, nuo minimalių paviršių lygties pereidami prie skysto metalo kontaktų uždavinio, natūraliai pradėjo spręsti uždavinius su nelokaliojomis sąlygomis.

Šie skaitiniai metodai ir algoritmai vienam uždaviniui (12)–(14) ar dvimačiam (15)–(17) atspausdinti daugelyje straipsnių [27–32].

Grįžtant prie skysto metalo lašo uždavinių reikia pastebėti, kad buvo bandymų spręsti ne tik stacionarius uždavinius (lašo ar „tiltelio“ pavidalo), bet ir nestacionarius (kontakto įjungimo ar išjungimo procesas) [33, 34].

4 Netiesinės difuzijos uždavinys

XX amžiaus aštuntajame-devintajame dešimtmetyje mokslinėje literatūroje nemažai buvo diskutuotas lokalizacijos efektas netiesinėje difuzijoje. Šio efekto esmė yra tokia. Užrašykime priemaišų difuzijos kietajame kūne lygtį, dėl paprastumo viena-

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(n) \frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad (18)$$

kurioje $n(x, t)$ yra priemaišų (skverbiančiosios medžiagos) koncentracija taške x laiko momentu t ; $0 < x < 1$, $0 < t < T$. Spręskime (18) lygtį su pradine ir kraštine sąlygomis

$$n(x, 0) = 0, \quad (19)$$

$$n(0, t) = n_s(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} n(x, t) = 0, \quad (20)$$



7 pav. Svarovskio krištolo muziejus (netoli Insbruko), Austrija, 1998.

Nagrinėjant šio uždavinio automodelinius sprendinius buvo nustatyta, kad neribotai didėjant reikšmei $n_s(t)$ taške $x = 0$, priemaišos $n(x, t)$ neprasiskverbia giliau tam tikros reikšmės x_1 (ir dar nepriklausomai nuo t). Kitaip tariant, priemaišos lokalizuojasi baigtinėje srityje. Tokį efektą galima stebėti specialiu būdu parinkus $n_s(t)$

$$n_s(t) = (T - t)^\alpha, \quad \alpha = \text{const} < 0. \quad (21)$$

Pastebėjime, kad $n_s(t) \rightarrow \infty$, kai t – baigtinis skaičius.

Devintajame dešimtmetyje tuometinio Lietuvos MA Matematikos ir kibernetikos instituto Skaičiavimo metodų skyriuje buvo sprendžiami Vilniaus konstravimo biuro užsakomieji darbai iš netiesinės difuzijos. TSRS MA M. Keldyšo Taikomosios matematikos instituto mokslininkai pasiūlė Lietuvos matematikams, sprendžiant difuzijos uždavinius, pabandyti panagrinėti lokalizacijos efektą. Buvo pasirinktas toks scenarijus lokalizacijos efektui atsirasti. Sąlyga $n_s(t) \rightarrow \infty$ nutarta realizuoti tokiu būdu: netiesinės difuzijos procesą pakaitomis keisti su jonų implantacijos procesu. Laiko momentu t_k jonų, implantacijos procesu į silicio plokštę įterpiamas skverbiančiosios medžiagos (fosforo) kiekis S_k . Priemaišos pasiskirsto arti paviršinio sluoksnio. Tada laiko intervale $t \in [t_k, t_{k+1}]$ vyksta difuzijos procesas, atitinkantis matematinį modelį.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(n^\sigma \frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad (22)$$

$$n(x, t_k) = n_k(x), \quad (23)$$

$$\int_0^1 n(x, t) dx = S_k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} n(x, t) = 0, \quad (24)$$

čia S_k priemaišų kiekis po implantacijos, $n_k(x)$ – difuzijos lygties sprendinys laiko momentu t_k prieš implantaciją.

Gavome visai naujo tipo difuzijos uždavinį su nelokaliąja (integraline) sąlyga. Dabar, norint kad atsirastų lokalizacijos efektas, reikia specialiai parinkti ne kraštinę sąlygą (20) visam difuzijos procesui, o priemaišų kiekį implantacijai. Straipsnyje [38] įrodyta, kad implantacijos-difuzijos procesu galima algoritmiškai užtikrinti lokalizacijos proceso susidarymo sąlygas. Analogiškai buvo išnagrinėtas ir dvimatis difuzijos modelis. Pagrindiniai rezultatai paskelbti straipsniuose [36–39].



8 pav. Mokslo parodos „Eureka“ paviljonai (architektas J. P. Straub). Ciurichas (Šveicarija), 1991.



9 pav. Akcija neįgaliesiems remti. Viena, miesto centras, 1998.

5 Minimalių paviršių taikymas

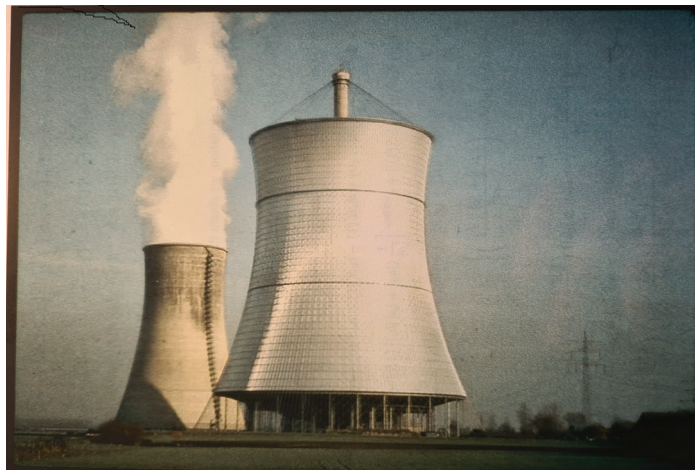
Kaip jau buvo minėta 2 skyriuje, minimalaus paviršiaus radimo uždavinys, kai yra duotas paviršiaus kontūras, suformuluotas ir pradėtas spresti XVIII amžiaus antroje pusėje. Nematematikoje minimaliais paviršiais susidomėta po 1849 m. atliktų J. Plato eksperimentų su muilo plėvele. Belgų fizikas ir chemikas J. A. F. Plateau (1801–1883), nagrinėdamas minimalių paviršių susidarymą, atliko technine prasme gana paprastą eksperimentą. Panardinus erdvinį (ne plokščią) iš vielos sulankstytą karkasą į muilo skiedinį, ant šio karkaso susidaro muilo plėvelė kurios formą sąlygoja tik paviršiaus įtempties jėga. Taip susidaro matematiškai idealus minimalus paviršius.

J. Plato taip pat pastebėjo, kad priklausomai nuo vielos sulankstymo, kartais gali susidaryti daugiau negu vienas minimalus paviršius. Diferencialinių lygčių terminais tai reiškia, kad priklausomai nuo kraštinių sąlygų elipsinei lygčiai gali egzistuoti keli minimalūs paviršiai.

Matematikų susidomėjimas J. Plato eksperimentais buvo toks didelis, kad mate-



10 pav. Stokholmas. Mugė prie Karalių rūmų. 2021.

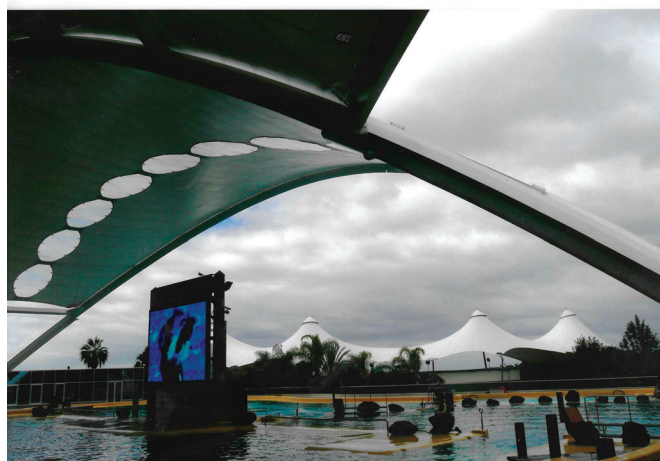


11 pav. Šaldymo bokštas. Schmehausen (Vokietija). Dalies cilindrinio paviršiaus pakeitimas minimaliu paviršiumi didina bokšto atsparą vėjui.

matikoje minimalaus paviršiaus radimo pagal užduotą kontūrą uždavinys buvo pavadintas Plato uždaviniu (arba Plato problema). Tarp kitko, pats J. Plato savo eksperimentų nematė, nes prieš keletą metų, atlikdamas kitus eksperimentus, neteko regėjimo. Praktiškai eksperimentus su muilo plėvele atliko jo asistentai, jam vadovaujant. Eksperimentų rezultatai aprašyti įvairiomis kalbomis [35].

Per paskutinius kelis dešimtmečius minimalūs paviršiai gana dažnai taikomi architektūroje (pastatų perdangos), chemijoje ir fizikoje (skysčių paviršių formos), kristalografijoje (gardelių struktūros), dizaine (vaikų žaidimo aikštelės, baldai) ir t.t. Minimalių paviršių susidarymą dažnai galima stebėti ir gamtoje (smėlio kopos, kalnų masyvai, jūrų augmenija ir gyvūnija). Architektūroje minimalūs paviršiai siejami su minimalizmo formų raiška (nuo XX amžiaus 7-ojo dešimtmečio). Minimalių paviršių idėjos architektūroje paaiškinamos keliais aspektais.

Pirma, gana elementarus argumentas – jeigu paviršiaus plotas yra galimai mažiausias, tai ir medžiagų sąnaudos yra minimizuojamos. Sutinku su prieštaraujančiais, tai



12 pav. Loro parkas Tenerifės saloje. Kanarų salos (Ispanija) 2008.

tikriausiai, ne svarbiausias argumentas. Antra, kas technologiniu požiūriu yra jau žymiai svarbiau, kiekviename minimalaus paviršiaus taške dėl tokio pat vidutinio kreivio, mechaninės įtampos yra vienodos, t.y. nėra kritinių taškų, kuriuose įtempimai būtų didesni lyginant su kitais perdangos taškais. Na, ir trečia, su kuo sunku ginčytis – minimalių paviršių formos paprastai yra pakankamai estetiškos.

Vokiečių architektas Otto Frei (1925–2015) – vienas pirmųjų pasaulio architektų, sėkmingai pradėjęs naudoti minimalių paviršių formas architektūroje. Būtent jo kūrinys Vokietijos (VFR) paviljonas parodoje EXPO-67 Monrealio mieste (Kanada) daugeliui meno gerbėjų tapo pirmuoju ir įsimintinu pavyzdžiu iš naujos architektūrinės krypties (4 pav.). Po kelių metų pasirodė naujas O. Frei architektūrinis šedevras – Miuncheno olimpinis stadionas (1972 m.) (5 pav.). Pabrėžtina, kad O. Frei iš pat pradžių daug investavo į lengvų konstrukcijų projektavimą, įkurdamas Lengvųjų konstrukcijų institutą Štutgarde.

Kalbant apie O. Frei kūrybą, vėl trumpam grįžkime prie minimalizmo krypties architektūroje. Manoma, kad minimalizmui vaduojantis iš griežtų geometrinių rėmų, pereinant prie šiuolaikinių technologijų, naujai suvokiama forma. Tolesnės minimalizmo raidos perspektyvos sietinos su konceptualių virtualiuoju modeliavimu. Prisi-laikydamas šio principo, O. Frei naujoms formoms sukurti naudojo ne tik J. Plato modeliavimą, panardinant vielos karkasą į muilo skiedinį, bet ir antrą šiuolaikinę galimybę. Būtent su kompiuteriu buvo sprendžiama minimalaus paviršiaus lygtis. Pakartosiu šią mintį konkrečiau. Tam, kad būtų sukurtos naujos architektūros formos, aukštos klasės skaitinių metodų specialistas J.H. Argyris su superkompiuteriu sprendė netiesinę diferencialinę lygtį. Tokios yra šiandien naujų architektūrinių šedevrų gimimo aplinkybės. Plačiau O. Frei architektūrinės idėjos yra aprašytos daugelyje knygų [40–42].

Ispanų architektas Felix Candela (1910–1997) suprojektavo keliasdešimt restoranų bei kitos paskirties pastatų (daugiausia Meksikoje ir Ispanijoje), kurių minimalaus paviršiaus formos stogas primena šešialapį dobilą (6 pav.).

Šiandien daugelyje Vakarų Europos miestų gana daug stacionarių architektūrinių



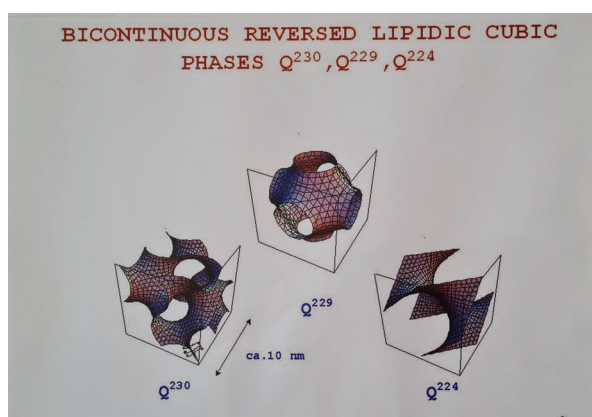
13 pav. Vilniaus Vingio parko estrada – klasikinis minimaliųjų paviršių architektūroje pavyzdys.



14 pav. Vilnius, Vokiečių g. Vasaros sezonui sumontuojamos kavinukių perdangos, 2009.



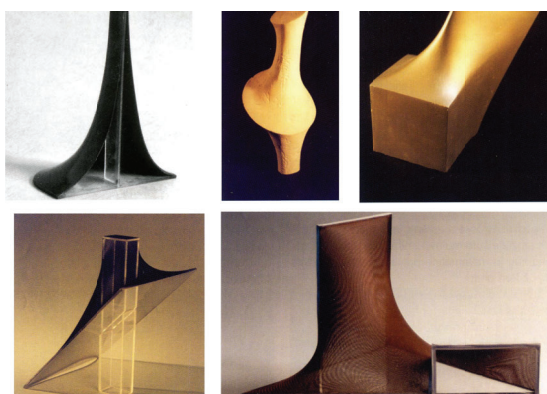
15 pav. Menų ir pramogų klubas „Kupeta“ Palangoje.



16 pav. Minimalių paviršių formos lipiduose. Prof. V. Razumas. Biochemijos institutas, 2009.



17 pav. Žurnalo „Notices of the AMS“ viršelis. Kompiuterinės grafikos autoriai M. Wolf, M. Weber. 2000.



18 pav. Pratymai – užduotys Vilniaus dailės akademijos studentams iš prof. J. Burneikos knygos „Forma, kompozicija, dizainas“, 2002.

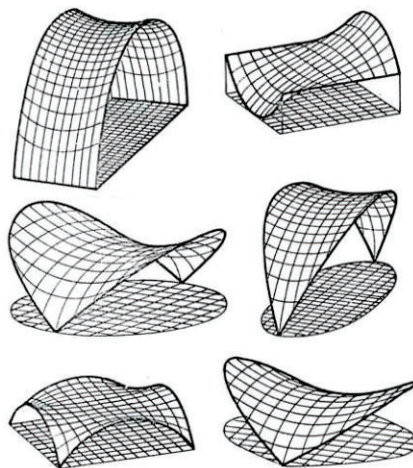


19 pav. Erdvinė lentyna „Exept“. Dizaineris P. Gasūnas. Litexpo paroda, 1998.

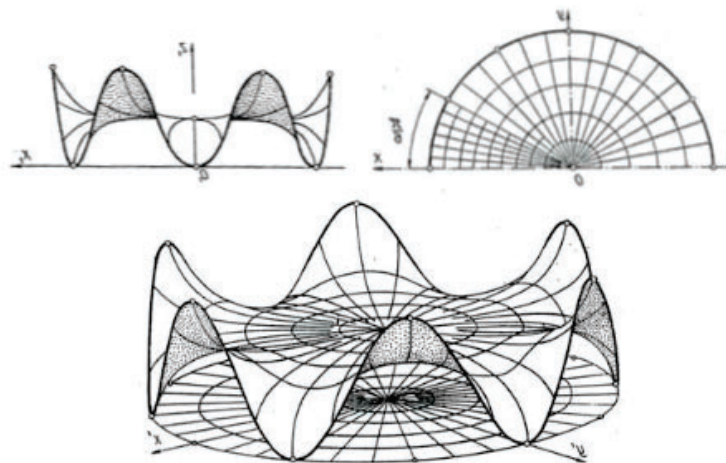
objektų su minimalaus paviršiaus perdangomis iš lengvų konstrukcijų. Tai oro uostų pastatai, muziejai, sporto salės (7 pav.). Yra ir laikinų paviljonų, skirtų įvairioms akcijoms, kavinėms, koncertams (8, 9, 10 pav.). Kanarų salose minimalieji paviršiai gražiai suderinti su delfinariumo vandens plotais (12 pav.).

Kalbant apie minimalius paviršius architektūroje, Lietuva irgi nėra išimtis. Pirmiausia, Vingio parko estrada yra beveik klasikinis minimaliųjų paviršių pavyzdys (13 pav.). Pastatyta 1960 metais pagal estų architektų A. Kotli, H. Seppmann ir U. Gelpus projektą. Kiek anksčiau panašus statinys iškilo Taline. Iš tikrųjų, tai šio pastato perdanga nėra tikslus minimalus paviršius, tačiau pagal daugelį požymių jam artimas. Nepavyko rasti jokių duomenų, ar autoriai prisilaikė minimalių paviršių idėjos ar tai atsitiktinis sutapimas.

Lietuvoje dekoratyvinių minimalių paviršių formos perdangų pastaraisiais metais galima pamatyti Vilniuje ir Palangoje. Daugiausia tai sezoniniai paviljonai kavinėms



20 pav. Kijevo ir Vilniaus mokslininkų bei inžinierių suprojektuotos minimalių paviršių formos perdangos, 1967–1970 m.



21 pav. Dar vienas Lietuvos matematikų ir Kijevo inžinierių bendro darbo pavyzdys – šešialapis dobilas.

(14 pav.). Iš stacionarių pastatų reikėtų atskirai paminėti Menų ir pramogų klubą „Kupeta“ Palangoje (15 pav.). Deja, kažkodėl „Kupeta“ paslėpta nuo praeivio akių aukšta neestetiskai atrodančia tvora. O iš tikrųjų tai įdomus statinys. „Kupetą“ sukūrė ir pastatė UAB „Vingida“.

Praėjusio amžiaus septintajame dešimtmety minimalių paviršių perdangomis susidomėjo Kijevo statybos inžinerijos instituto architektai ir inžinieriai. Tačiau jie neturėjo skaitinių metodų specialistų minimalaus paviršiaus lygčiai spręsti.

Tuo tikslu jie pasiūlė Lietuvos MA Fizikos ir matematikos instituto Skaitinių metodų skyriui (M. Sapagovas, G. Kairyte, D. Sapagovienė, T. Veidaitė) bendradarbiauti projektuojant pastatus su minimalaus paviršiaus perdangomis. Architektūriniais terminais Lietuvos matematikai vykdė virtualųjį modeliavimą. Kijeve ir Čerkasuose (ten buvo Kijevo statybos inžinierių instituto filialas) architektai suplanuodavo galimus minimalių paviršių kontūrus (imdavo konkrečias sritis, kuriose buvo sprendžiama diferencialinė lygtis, ir konkrečias kraštines sąlygas), o Vilniuje matematikai sprendavo



22 pav. Kėdė. Dizaineris Verner Panton. 1967.



23 pav. Staliukas gėlems. 2009.

minimalaus paviršiaus lygtį. Taip buvo išanalizuota daug variantų (20, 21 pav.).

Dabar galima suprasti, kad, tikriausiai, Kijevo architektai ir inžinieriai žinojo Otto Frei ir F.Candela darbus ir bandė pakartoti ar patobulinti jų rezultatus, o Lietuvos matematikams tai buvo vertinga patirtis priartėti prie realių taikomųjų uždavinių.

Gana sudėtingas minimalių paviršių formas naudoja Lietuvos biochemikai tirti procesams ir reiškiniams skysčių paviršiuje (16 pav.). Prof. Juozo Burneikos (1929–2016) knygoje nemažai dėmesio skirta minimalių paviršių vaidmeniui dailėje (18 pav.).

Tačiau yra dar vienas įdomus faktas, kalbant apie minimalių paviršių pradžią. Vis tik kažin ar galima teigti, kad žmogus atrado ar sukūrė minimalius paviršius. Šio straipsnio autorius yra tos nuomonės, kad minimalius paviršius sukūrė gamta (26 pav.). Žmogus tik suprato, ką gamta sukūrė ir savaip papildė gamtos darbą. Tikriausiai, kai kurie žmogaus kūriniai pakankamai turiningi ir racionaliūs. Įvairūs moliuskai ir reptilijos jūros dugne irgi paklūsta minimalios formos, minimalios energijos dėsniams (25 pav.).

Mokslo ir meno pasaulyje laikas nuo laiko atsiranda kūrėjų, kuriuos užvaldo minimalių paviršių egzotika, kurie tampa tikrais minimalių paviršių fanatikais. Vieną jų – vokiečių architektą Otto Frei trumpai jau minėjome. Otto Frei mokinys Bodo Rasch, norėdamas modernias minimalių paviršių formas įkomponuoti į musulmonų šventyklą, tapo musulmonu, kad gautų teisę projektuoti mečetę. Jo suprojektuota mečetė, kurioje gausu filosofškai įprasmintų minimalių paviršių formų, praeito amžiaus pabaigoje pastatyta Medinoje (Saudo Arabija) (27 pav.).

Kitas minimalių paviršių fanatikas yra Maskvos Lomonosovo universiteto profesorius geometras Anatolij Fomenko (g. 1945 m.). Jis yra kelių knygų apie geometriją ir topologiją autorius, gavo vertingus teorinius rezultatus apie minimalius paviršius, išsprendė daugiamatę Plato problemą. Būdamas talentingu ir originaliu dailininku,

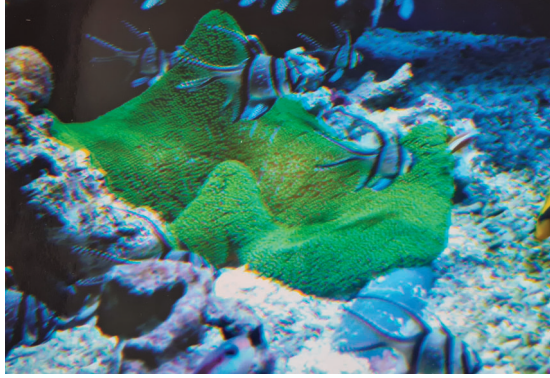


24 pav. Kavos puodeliai.

piešia paveikslus su realiomis ar fantastinėmis formomis, iliustruoja knygas, mėgsta paveikslus su fantastinėmis minimalių paviršių formomis pateikti kaip iliustracijas geometrijos teoremų įrodymui (28, 29, 30, 31 pav.).

Paminėsiu dar du Lietuvos mokslo ir meno atstovus, palikusius originalų pėdsaką minimalių paviršių istorijoje, sukurtoje įvairių profesijų ir įvairių šalių atstovų. Vienas jų matematikas Vilniaus universiteto profesorius Algirdas Ambrazevičius (1952–2023). Gimęs ir augęs Vilniuje, Algirdas dar vidurinėje mokykloje pamėgo matematiką, dalyvavo matematikos olimpiadose. 1971 metais baigęs vidurinę mokyklą, įstojo į Vilniaus universitetą studijuoti matematiką. Čia verta šiek tiek nukrypti į šalį nuo minimalių paviršių ir priminti svarbų epizodą Lietuvos matematikų gyvenime. Septintojo dešimtmečio pirmoje pusėje Lietuvoje kaip ir daugelyje kaimyninių valstybių ir respublikų, prasidėjo aktyvus galingų (to meto masteliu) elektroninių skaičiavimo mašinų (ESM) naudojimas. Labai truko specialistų tose matematikos šakose, kurios buvo susijusios su ESM efektyviu panaudojimu (skaitiniai metodai, matematinė logika, programavimas, diferencialinės lygtys ir pan.). Lietuvos Mokslų akademijos Fizikos ir matematikos instituto direktorius Vytautas Statulevičius, baigęs aspirantūrą tuometiniame Leningrado (dabar Sankt Peterburgo) universitete, susitarė su šio universiteto profesore, žymia diferencialinių lygčių specialiste, O. Ladyženskaja dėl Vilniaus universiteto matematikos specialybės studentų tolesnių studijų Leningrado universitete. Šiai idėjai entuziastingai pritarė Vilniaus universiteto rektorius Jonas Kubilius. Taip nuo 1973 m. rugsėjo penki gabūs Vilniaus universiteto studentai matematikai tesė studijas Sankt Peterburge, pasirinkę diferencialinių lygčių specializaciją. Vienas iš šio penketo buvo Algirdas Ambrazevičius. Baigęs universitetą 1977 m., jis įstojo ten pat į aspirantūrą. Vadovaujant prof. N. Uralcevai, Algirdas parengė ir 1981 m. apgynė fizikos-matematikos mokslų kandidato (dabar daktaro) disertaciją “Kapiliarumo problemos kūginėse srityse”.

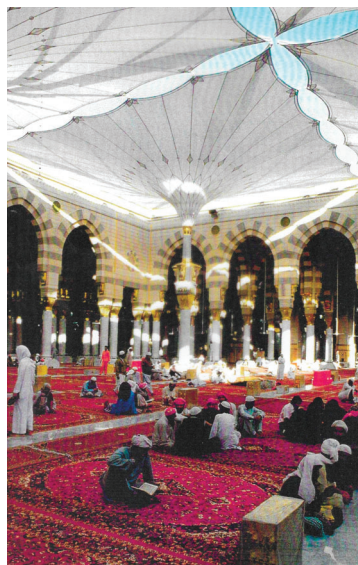
Verta pastebėti, kad tuo metu ir prof. O. Ladyženskaja ir prof. N. Uralceva, diferencialinių lygčių problematikoje priklausė pasaulio mokslo elitui. Paprastai jų aspirantų mokslinės temos buvo šiuolaikiškos ir aktualios, o gabesnių aspirantų rezultatai pakankamai reikšmingi. Mano nuomone, paskutinė frazė yra teisinga, kalbant apie Algirdą. Kapiliarumas arba kapiliariniai reiškiniai paprastai suprantami kaip



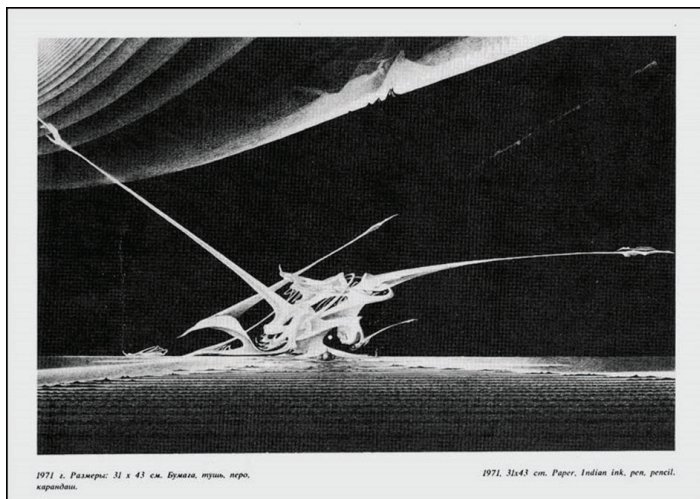
25 pav. Akvariumas Okeanografijos muzejuje, Monakas, 2008.



26 pav. „Mėnulis balne“, J. Winnie nuotrauka. Džaspero nacionalinis parkas, Alberta (Kanada) 1992.



27 pav. Musulmonų šventykla Haram Piazza Medinoje (Siaudo Arabija).



1971 г. Размеры: 31 x 43 см. Бумага, тушь, перо, карандаш.

1971, 31x43 cm. Paper, Indian ink, pen, pencil.

28 pav. Prof. A. Fomenko. Paveikslas–ilustracija teoremos apie globaliųjų minimalių paviršių egzistavimą įrodymui (1971 m.).



1969 г. Размеры: 61 x 85 см. Бумага, тушь, перо, карандаш, кисть.

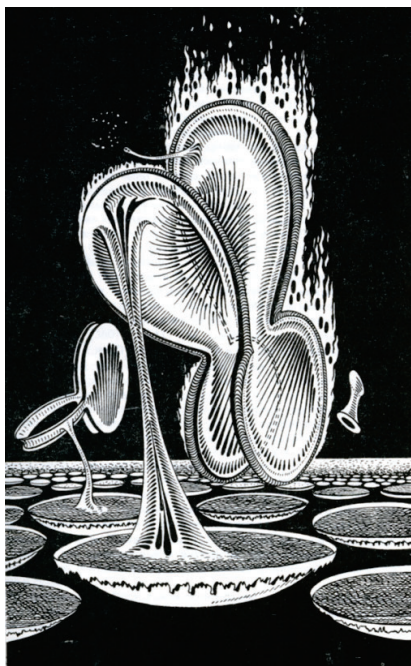
1969, 61x85 cm. Paper, Indian ink, pen, pencil.

29 pav. „Minimalieji konusai virš minimaliųjų daugdarų“. Autorius prof. A. Fomenko 1969.

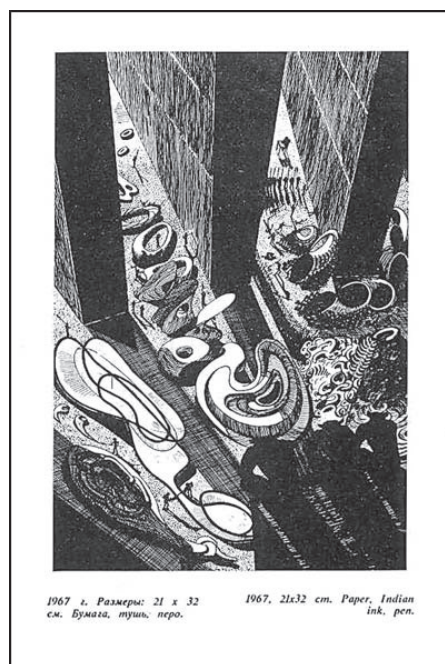
reiškiniai ar procesai, susiję su skysčio paviršiaus įtemptimi, kietojo kūno, skysčio ir dujų sąlyčio riboje. Šių procesų įtakoje skysčio paviršius yra smarkiai deformuojamas (iškreivinamas), skysčio meniskas pasidaro įgaubtas ar iškilas. Veikiant skysčio paviršiaus įtempies jėgai, skystis užima mažiausią tūrį (mažiausias paviršiaus plotas, mažiausia laisvoji energija). Iš čia ir tampa aiškus tamprus kapiliarumo problemų ryšys su minimaliais paviršiais. Grynai matematikos prasme visų šių uždavinių būdingas bruožas - diferencialinė lygtis yra netiesinė su koeficientais, priklausomais nuo sprendinio gradiento, ir dar netolygiai elipsinė. Ką gi naujo įrodė A. Ambrazevičius? Nepilnai griežtai, tačiau nenutolstant nuo matematinių sąvokų galima atsakyti taip. Teoriškai išnagrinėtas minimalaus paviršiaus pavidalo lygčių sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygos bei sprendinio savybės. Ir viena būdinga detalė. Analogiškai kapiliarumo uždaviniai buvo nagrinėti ir kitų autorių moksliniuose straipsniuose, tačiau tik cilindrinėse srityse, t. y. esant rimtam apribojimui, kad kapiliaro skerspjūvis yra pastovus.

Po disertacijos ginimo Algirdas grįžo į Vilniaus universiteto matematikos fakultetą ir pradėjo dirbti Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos katedroje. Parašė keletą vadovėlių ir labai intensyviai dirbo mokslinį darbą, nagrinėdamas įvairių medžiagų paviršinės reakcijos matematinius modelius. Šioje srityje jo rezultatai yra reikšmingi, o moksliniai straipsniai yra atspausdinti aukšto reitingo žurnaluose [45–48].

Ir kūrinio pabaigai šiek tiek informacijos apie lietuvę Amerikoje Aleksandrą Kašubienę. Skulptorė, keramikė, architektė, menininkė Aleksandra Fledžinskaitė- Kašubienė (Kasuba) gimė 1923 m. sausio mėn. 10 d. Ginkūnuose Šiaulių apskrityje. Jos senelis ir proseneliai yra žymūs Šiaulių krašto grafai Zubovai. Aleksandra ir užaugo grafams Zubovams priklausiusiame Ginkūnų dvare. Baigusi mokslus Lietuvoje (Kau-no ir Vilniaus Dailės akademijose), A. Kašubienė 1944 m. pasitraukė į Vokietiją, o



30 pav. Prof. A. Fomenko (Maskvos universitetas) paveikslas „Minimalūs paviršiai“ (1987 m.).



31 pav. „Topologinis zooparkas“. Autorius prof. A. Fomenko. Iliustracija teoremų apie minimalius paviršius įrodymui (1967).

1947 m. persikėlė į Niujorką.

Viena iš jos kūrybos krypčių – abstrakčios tampraus sintetinio audinio instaliacijos. Savo kūryboje vadovavosi minimalizmo mene principu. Kurti naujas formas ją skatino minimalių paviršių mokslinės teorijos ir kompiuterinės technologijos. Kalbant apie A. Kašubienės kūrybą, specialistai pažymi, kad minimalizmas padėjo instaliacijai atsirasti, t. y. eksponuojant kūrinius erdvėje sudaromos sąlygos įtraukti žiūrovą.

Menininkei buvo įdomu eksperimentuoti su medžiagomis ir įtemptų membranų standumu. Matematine prasme ji modeliavo minimalius paviršius, naudodama tamprias medžiagas, aptemptas ant erdvinio kontūro. Savo kūryboje ji priartėjo prie minimalių paviršių formų skulptūroje. Dalį savo kūrinių ji sukūrė vadovaudamasi tokia metodika. Su menininkės pasirinktu kontūru iš pradžių matematikai skaitinių metodų specialistai D. Hoffman, J. Hoffman ir W. Meels, spręsdami minimalaus paviršiaus lygtį, kompiuterio ekrane pateikdavo surasto sprendinio dvimatį spalvotą vaizdą. Pagal šį vaizdą A. Kašubienė kūrė erdvines paviršių konfigūracijas. Daug apie tai buvo aprašyta „The New York Times“ 1986 m. rugpjūčio 24 d. [44].

Paskutiniaisiais gyvenimo metais A. Kašubienė norėjo grįžti iš didmiesčio į gamtą. Be to, ji norėjo įgyvendinti savo pastatų be stačių kampų viziją. Ji nusipirko sklypą Naujoje Meksikoje, kuriame pastatė Akmenų kalvos gyvenamąjį namą ir svečių studiją su minimalių paviršių stogu. Mirė A. Kašubienė 2019 m. Naujoje Meksikoje.



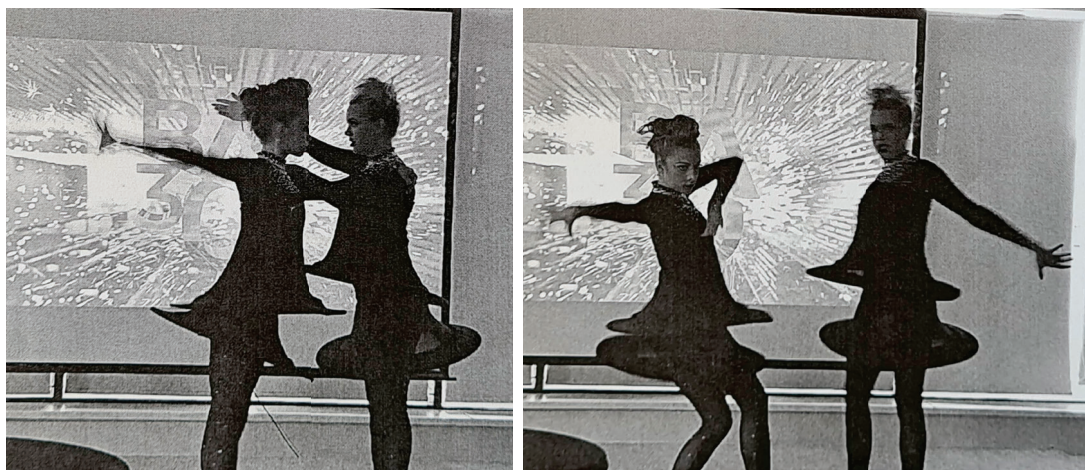
32 pav. A.Kašubienės suprojektuotas gyvenamasis namas sau su minimalaus paviršiaus formos perdangomis (Nevados dykuma, Naujoji Meksika, 2003-2005 m).



33 pav. Viena ankstyvųjų Aleksandros Kašubienės plastinių minimalių paviršių formos skulptūrų gyvenamųjų namų rajone.

6 Užduviniai su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis

Kaip buvo trumpai paminėta, moksliniai tyrimai Lietuvoje apie diferencialinių lygčių su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis skaitinius metodus prasidėjo nuo dviejų taikomųjų uždavinių sprendimo. Tai – kontaktų iš skysto metalo projektavimas (iniciatorius akad. K. Ragulskis) ir lokalizacijos efekto netiesinėje difuzijoje modeliavimas (iniciatorius D. Zanevičius). Dauguma mokslinių publikacijų su šių uždavinių sprendimo rezultatais buvo paskelbta 1983–1986 metais. Tuo pat metu pradėta nagrinėti naujus uždavinius, jau nebūtinai susijusius su kuriuo nors vienu konkrečiu taikomuoju uždaviniu. Iš tokių rezultatų galima paminėti straipsnį [49], kuriame išnagrinėtos paprastosios diferencialinės lygties su Bicadze–Samarskio nelokaliaja sąlyga sprendinio egzistavimo ir vienaties būtinios ir pakankamosios sąlygos. Mūsų žiniomis, tai buvo pirmoji pasaulyje mokslinė publikacija apie nelokalias sąlygas netiesinei diferencialinei lygčiai.



34 pav. Minimalūs paviršiai choreografijoje. Diamonds Show (Kaunas) šokėjos sveikina pirmąją Lietuvoje informacinių technologijų bendrovę Baltic Amadeus 30-mečio proga. Akad. L. Telksnio nuotrauka, 2018.

Artimi klausimai, o taip pat ir šio uždavinio sprendimas baigtinių skirtumų metodu, nagrinėti straipsnyje [50]. Pirmaisiais šio šimtmečio metais Lietuvoje pradėta tirti diferencialinių ir skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūra [51–55]. Tai buvo naujo tipo svarbūs teoriniai klausimai nelokalųjų uždavinių problematikoje.

Spektro struktūros tyrimo rezultatai iš karto buvo naudojami skirtuminių schemų stabilumui tirti [56–59]. Dar viena spektro struktūros taikymo sritis tai skirtuminių lygčių sistemos sprendimo iteraciniai metodai. Taip buvo surastos iteracinių metodų konvergavimo sąlygos uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis [54], tame tarpe ir šiuolaikiniam kintamųjų krypčių metodui [61–63]. Spektro struktūros tyrimo rezultatai, gauti iki 2014 metų, pakankamai išsamiai apžvelgti straipsnyje [64].

Paskutiniaisiais metais skirtuminių schemų su nelokaliosiomis sąlygomis tyrimui sėkmingai naudojama ir plėtojama M-matricų teorija [65].

Apie uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis skaitinių metodų tyrimų mastą ir svarbą galima spręsti ir iš to, kad nuo 1985 m. šia tematika Vilniuje ir Kaune apginta 16 mokslų daktaro disertacijų [66–81].

Vietoje išvadų

Netiesinių elipsinių lygčių skaitinių metodų moksliniai tyrimai prasidėjo Lietuvos MA Fizikos ir matematikos instituto Skaičiavimo metodų skyriuje praeito amžiaus septintojo dešimtmečio pradžioje. Iš esmės tai buvo pirmieji moksliniai tyrimai pokario Lietuvoje matematikos šakos – Skaičiavimo matematikos, tematikoje. Apžvalgoje aprašyta, kaip šie moksliniai tyrimai, įtakojami praktinių poreikių, pamažu keitėsi. Bene didžiausią įtaką turėjo trys praktiniai uždaviniai: minimalių paviršių taikymas, kontaktų iš skysto metalo projektavimas ir priemaišų difuzija kietajame kūne. Dabar netiesinių elipsinių lygčių skaitinių metodų tematika virto diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis tematika. Iš esmės tai labai artimi matematiniai uždaviniai. Dabar diferencialiniai uždaviniai su įvairaus pavidalo nelokaliosiomis kraštinėmis

sąlygomis yra intensyviai nagrinėjamos mokslo šakos diferencialinių lygčių teorijoje ir skaičiavimo matematikoje. Autorius tikisi, kad ši apžvalga gali būti naudinga ir tiems, kas vienu ar kitu aspektu domisi Lietuvos matematikos istorija. O gal kam nors atsiras naujų minčių apie minimalių paviršių naujus taikymus.

Literatūra

- [1] M.P. Sapagovas. A solution of the quasilinear elliptic equation by finite-difference method. *Lith. Math. J.*, **5**(2):291–302, 1965. <https://doi.org/10.15388/LMJ.1965.19562>. (in Russian)
- [2] M.P. Sapagovas. Finite difference method for solution of quasilinear elliptic equation with discontinuous coefficients. *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, **5**(4):72–85, 1965. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(65\)90120-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(65)90120-5). (М.П. Сапагоvas. Метод конечных разностей для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 5(4):638–647, 1965.)
- [3] L. Bers. On mildly nonlinear partial differential equations of elliptic type. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **51**(5):229–236, 1953. <https://doi.org/10.6028/JRES.051.030>.
- [4] A.I. Koshelev. On the convergence of the successive approximations for quasi-linear elliptic equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **142**(5):1007–1010, 1962. <https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=26115>. (in Russian)
- [5] A.D. Lyashko, M.M. Karchewskii. Investigation of difference schemes for nonlinear equations with the help of a variational method. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, (3):59–65, 1967. <https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=3124>. (in Russian)
- [6] E.G. Djakonov. *Difference Methods for Solving Boundary Value Problems*. Moscow Gos. Univ., Moscow, 1971. (in Russian)
- [7] D. Sapagovienė. On calculation of Laplace's operator eigenvalues. *Lith. Math. J.*, **11**(4):875–882, 1971. <https://doi.org/10.15388/LMJ.1971.21041>. (in Russian)
- [8] A. Agalcev, M. Sapagovas. The solution of the equation of minimal surface by finite-difference method. *Lith. Math. J.*, **7**(3):373–379, 1967. <https://doi.org/10.15388/LMJ.1967.19976>. (in Russian)
- [9] V. Kleiza. Of sufficient conditions of the application of the Monte-Carlo method to systems of nonlinear equations. *Lith. Math. J.*, **12**(2):57–63, 1972. <https://doi.org/10.15388/LMJ.1972.21110>. (in Russian)
- [10] M.P. Sapagovas. An estimate of the difference Green's function for some elliptic equations. *Lith. Math. J.*, **13**(1):133–140, 1973. <https://doi.org/10.1007/BF01540084>.
- [11] M.P. Sapagovas. Construction of difference schemes of high order of accuracy for elliptic quasilinear equations. *Lith. Math. J.*, **15**(2):275–293, 1975. <https://doi.org/10.1007/BF00966058>.
- [12] R. Skirmantas. Iteration method for the solution of weakly linear difference equations. *Lith. Math. J.*, **24**(1):74–79, 1984. <https://doi.org/10.1007/BF00970339>.
- [13] R. Skirmantas. Difference schemes of higher order of accuracy for some weakly nonlinear elliptic equations. *Lith. Math. J.*, **18**(4):560–566, 1978. <https://doi.org/10.1007/BF00970339>.
- [14] J. Douglas. A method of numerical solution of the problem of plateau. *Annal. Math.*, **29**(1/4):180–188, 1927–1928. <https://doi.org/10.2307/1967991>.

- [15] D. Greenspan. On approximating extremals of functionals. I. the method and examples for boundary value problems. *IBB Bull.*, **4**:99–120, 1965.
- [16] P. Concus. Numerical solution of the minimal surface equation. *Math. Comput.*, **21**(99):340–350, 1967. <https://doi.org/10.2307/2003235>.
- [17] H. Schumacher, M. Wardetzky. Variational convergence of discrete minimal surfaces. *Numer. Math.*, **141**:173–213, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00211-018-0993-z>.
- [18] C. Johnson, V. Thomée. Error estimation for a finite element approximation of a minimal surface. *Math. Comput.*, **29**(130):343–349, 1975. <https://doi.org/10.2307/2005555>.
- [19] T. Cecil. A numerical method for computing minimal surfaces in arbitrary dimension. *J. Comput. Phys.*, **206**(2):650–660, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.12.022>.
- [20] H. Halbrecht. On the numerical solution of plateau’s problem. *Appl. Numer. Math.*, **59**(11):2785–2800, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2008.12.028>.
- [21] Q. Pan, G Xu. Construction of minimal subdivision surface with a given boundary. *Comput. Aided Design*, **43**(4):374–380, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2010.12.013>.
- [22] Ø. Tråsdahl, E.M. Rønquist. High order numerical approximation of minimal surfaces. *J. Comput. Phys.*, **230**(11):4795–4810, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.03.003>.
- [23] M. Sapagovas. Numerical methods for the solution of the equation of a surface with prescribed mean curvature. *Lith. Math. J.*, **23**(3):321–326, 1983. <https://doi.org/10.1007/BF00966474>.
- [24] N.N. Uraltseva. Solution of the capillary problem. *Vestn. Leningrd Univ.*, (19):54–64, 1973.
- [25] K. Ragulskis, M. Sapagovas, R. Čiupaila, A. Jurkulnevičius. Numerical experiment in stationary problems of liquid metal contact. *Vibrotechnika*, **4**(57):105–111, 1986.
- [26] R. Čiegis, R. Čiupaila. Solution of stationary problems of liquid metal contact. *Lithuan. Math. J.*, **30**(2):392–404, 1990.
- [27] M.P. Sapagovas. Investigation of the nonclassical drop problem. *Differ. Uravn.*, **19**(7):1271–1276, 1983. <https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=4911>. (in Russian, English translation: *Differ. Equat.* 19(7):949–953, 1983)
- [28] M.P. Sapagovas. Numerical methods for a two-dimensional problem with a nonlocal condition. *Differ. Uravn.*, **20**(7):1258–1266, 1984. <https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=5237>. (in Russian, English translation: *Differ. Equat.* 20(7):926–933, 1984)
- [29] M. Sapagovas. Numerical methods for solution of nonlinear differential equations with nonlocal conditions. *Computational Mathematics. Banach Center Publ.*, (13):45–59, 1984.
- [30] M. Sapagovas. Investigation of the convergence of a finite-difference method for the drop surface equation with the Neumann boundary condition. *Differ. Equat.*, **37**(7):1019–1025, 2001. <https://doi.org/10.1023/A:1011922108003>. (Translated from *Differ. Uravn.* 37(7):969–975, 2001.)
- [31] M.P. Sapagovas. Difference scheme for two-dimensional elliptic problems with an integral condition. *Lith. Math. J.*, **23**(3):317–320, 1983. <https://doi.org/10.1007/BF00966473>.

- [32] M. Sapagovas. The finite difference method for the equation of the sessile drop. In H. Amann, G.P. Galdi, K. Pileckas, V.A. Solonikov(Eds.), *Proc. of the 6th Intern. Conference NSEC-6, Palanga, Lithuania, 1997*, Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Problems, VSP/TEV, Utrecht/Vilnius, pp. 255–411, 1998.
- [33] R. Čiupaila. On the solution of the problem of dynamic of drop by finite elements method. *Differ. Equat. and their Applic.*, **37**:82–95, 1985.
- [34] R. Čiegis, R. Čiupaila. Method of conditional minimization for the numerical solution of a nonstationary problem with free boundaries. *Lith. Math. J.*, **31**(2):257–267, 1991. <https://doi.org/10.1007/BF00970822>.
- [35] A.T. Fomenko. *The Plateau Problem: Historical Survey*. Williston, VT: Gordon & Breach, 1989.
- [36] V. Būda, D. Zdanevičius, M. Sapagovas. Numerical experiment in nonlinear diffusion. In *Matem. i Mashin. Metody v Microelektr.*, pp. 36–42. PFI, Vilnius, 1984.
- [37] V. Būda, M. Sapagovas, R. Čiegis. Two-dimensional model of nonlinear diffusion. In *Matem. i Mashin. Metody v Microelektr.*, pp. 36–43. PFI, Vilnius, 1986.
- [38] V. Būda, R. Čiegis, M. Sapagovas. A model of multiple diffusion from a limited source. *Differ. Equat. and their Applic.*, **38**:9–14, 1986.
- [39] V. Būda, M. Sapagovas, R. Čiegis. Numerical investigation of nonlinear diffusion process in fabrication of integral circuits. In *Mathematical Modelling for Technology Problems*, pp. 39–47. P'FJ, MKI, Vilnius, 1995.
- [40] P. Drew. *Frei Otto: Form and Structure*. Westview Press, 1976.
- [41] D. Sharp. *Contemporary Architects* (M. Emanuel and D. Sharp and C. Naylor and C. Lerner(Eds.)). Macmillan, 1980.
- [42] O. Frei, B. Rasch. *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal*. Axel Menges, 1996.
- [43] J. Burneika. *Forma, kompozicija, dizainas*. VDA leidykla, 2002.
- [44] A. Kašuba. *Kasuba Works* (M. Howard(Ed.)). Blurb, 2011. <https://www.blurb.com/b/2029793>.
- [45] A. Ambrazevičius. Existence and uniqueness theorem to a unimolecular heterogeneous catalytic reaction model. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **15**(4):405–421, 2010. <https://doi.org/10.15388/NA.15.4.14312>.
- [46] A. Ambrazevičius, F. Ivanauskas, V. Mackevičius. Synchronization of solutions of Duffing-type equations with random perturbations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **15**(4):122–131, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.na.2013.07.031>.
- [47] A. Ambrazevičius, V. Skakauskas. Positive solution of a nonlinear parabolic system arising in grain drying. *Acta Appl Math*, **150**(1):123–140, 2017. <https://doi.org/10.1007/s10440-017-0098-1>.
- [48] A.P. Ambrazevičius. Finding the form of the surface of a liquid in a conical container for a given volume of the liquid. I. *Lith. Math. J.*, **22**(1):1–6, 1991. <https://doi.org/10.1007/BF00967921>.
- [49] M.P. Sapagovas, R.J. Čiegis. On some boundary value problems with a nonlocal condition. *Differ. Uravn.*, **23**(7):1268–1274, 1987. <https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=6262>. (in Russian)
- [50] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė, O. Suboč. Stationary problems with nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.*, **6**(2):178–191, 2001. <https://doi.org/10.3846/13926292.2001.9637157>.

- [51] M.P. Sapagovas. The eigenvalues of some problems with a nonlocal condition. *Differ. Equat.*, **38**(7):1020–1026, 2002. <https://doi.org/10.1023/A:1021115915575>.
- [52] M.P. Sapagovas, A.D. Štikonas. On the structure of the spectrum of a differential operator with a nonlocal condition. *Differ. Equat.*, **41**(7):1010–1018, 2005. <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0242-y>.
- [53] S. Pečiulytė, O. Štikonienė, A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **10**(4):377–392, 2005. <https://doi.org/10.3846/13926292.2005.9637295>.
- [54] K. Bingelė, A. Bankauskienė, A. Štikonas. Spectrum curves for a discrete Sturm–Liouville problem with one integral boundary condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **24**(5):755–774, 2019. <https://doi.org/10.15388/NA.2019.5.5>.
- [55] A. Štikonas, E. Šen. Asymptotic analysis of Sturm–Liouville problem with Neumann and nonlocal two-point boundary conditions. *Lith. Math. J.*, **62**(4):519–541, 2022. <https://doi.org/10.1007/s10986-022-09577-6>.
- [56] M.P. Sapagovas. On the stability of a finite-difference scheme for nonlocal parabolic boundary-value problems. *Lith. Math. J.*, **48**(3):339–356, 2008. <https://doi.org/10.1007/s10986-008-9017-5>.
- [57] J. Jachimavičienė, M. Sapagovas, A. Štikonas, O. Štikonienė. On the stability of explicit finite difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **19**(2):225–240, 2014. <https://doi.org/10.15388/NA.2014.2.6>.
- [58] R. Čiegis, N. Tumanova. Numerical solution of parabolic problems with nonlocal boundary conditions. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **31**(12):1318–1329, 2010. <https://doi.org/10.1080/01630563.2010.526734>.
- [59] T. Leonavičienė, A. Bugajev, G. Jankevičiūtė, R. Čiegis. On stability analysis of finite difference schemes for generalized Kuramoto–Tsuzuki equation with nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.*, **21**(5):630–643, 2016. <https://doi.org/10.3846/13926292.2016.1198836>.
- [60] O. Štikonienė, M. Sapagovas, R. Čiupaila. On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **19**(3):517–535, 2014. <https://doi.org/10.15388/NA.2014.3.14>.
- [61] M. Sapagovas, O. Štikonienė. A fourth-order alternating-direction method for difference schemes with nonlocal condition. *Lith. Math. J.*, **49**(3):309–317, 2009. <https://doi.org/10.1007/s10986-009-9057-5>.
- [62] M. Sapagovas, G. Kairytė, O. Štikonienė, A. Štikonas. Alternating direction method for a two-dimensional parabolic equation with a nonlocal boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **12**(1):131–142, 2007. <https://doi.org/10.3846/1392-6292.2007.12.131-142>.
- [63] M. Sapagovas, J. Novickij. Alternating direction method for the wave equation with integral boundary conditions. *Appl. Numer. Math.*, **182**:1–13, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.07.017>.
- [64] A. Štikonas. A survey on stationary problems, Green’s functions and spectrum of Sturm–Liouville problem with nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **19**(3):301–334, 2014. <https://doi.org/10.15388/NA.2014.3.1>.
- [65] M. Sapagovas, O. Štikonienė, K. Jakubėlienė, R. Čiupaila. Finite difference method for boundary value problem for nonlinear elliptic equation with nonlocal conditions. *Bound. Value Probl.*, **2019**:94.1–16, 2019. <https://doi.org/10.1186/s13661-019-1202-4>.

- [66] R. Čiegis. *Численное решение некоторых дифференциальных задач параболического типа с нелокальным интегральным условием (Parabolinio tipo lygčių su nelo kaline integraline sąlyga skaitinis sprendimas)*. PhD thesis, Institute of Mathematics and Cybernetics at Lithuanian SSR Academy of Sciences (apg. Baltarusijos SSR mokslų akademijos matematikos institute, Minskas), 1985. Supervisor: Prof. M. Sapagovas.
- [67] V. Būda. *Вычислительный эксперимент в нелинейной диффузии (Netiesinės difuzijos skaitinis eksperimentas)*. PhD thesis, Institute of Mathematics and Cybernetics at Lithuanian SSR Academy of Sciences (apg. Baltarusijos SSR mokslų akademijos matematikos institute, Minskas), 1987. Supervisor: Prof. M. Sapagovas.
- [68] R. Čiupaila. *Численное решение задач определения свободной поверхности жидкометаллических контактов с заданным объемом (Skysto metalo ir duotojo tūrio kontaktų laisvojo paviršiaus nustatymo uždavinio skaitinis sprendimas)*. PhD thesis, Institute of Mathematics and Informatics (apg. Baltarusijos SSR mokslų akademijos matematikos institute, Minskas), 1992. Supervisors: Prof. M. Sapagovas, Prof. R. Čiegis.
- [69] R. Suboč. *Some problems with non-local boundary conditions (Kai kurie uždaviniai su nelokalio mis kraštinėmis sąlygomis)*. PhD thesis, Vilnius Gediminas Technical University, 2002. Supervisor: Prof. R. Čiegis.
- [70] S. Pečiulytė. *Investigation and numerical analysis of boundary problems with various types nonlocal conditions (Kraštinių uždavinių su įvairių tipų nelokaliosiomis sąlygomis tyrimas ir skaitinė analizė)*. PhD thesis, Vytautas Magnus University and Institute of Mathematics and Informatics, 2007. https://www.mii.lt/files/doc/lt/doktorantura/apgintos_disertacijos/mii_dis_2007_peciulyte.pdf. Supervisor: Prof. A. Štikonas.
- [71] Ž. Jesevičiūtė. *The eigenvalue problem for differential operator with nonlocal integral conditions (Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis)*. PhD thesis, Vilnius University, 2010. https://www.mii.lt/files/doc/lt/doktorantura/apgintos_disertacijos/mii_dis_2010_jeseviciute.pdf. Supervisor: Prof. M. Sapagovas.
- [72] S. Roman. *Green's functions for boundary-value problems with nonlocal boundary conditions (Gryno funkcijos uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis)*. PhD thesis, Vilnius University, 2011. https://www.mii.lt/files/doc/lt/doktorantura/apgintos_disertacijos/mii_dis_2011_roman.pdf. Supervisor: Prof. A. Štikonas.
- [73] N. Tumanova. *The numerical analysis of nonlinear mathematical models on graphs (Netiesinių matematinių modelių grafuose skaitinė analizė)*. PhD thesis, Vilnius Gediminas Technical University, 2012. https://aleph.library.lt/F?func=direct&=&local%5Fbase=VGT01&doc%5Fnumber=000086956&pds_handle=GUEST. Supervisor: Prof. R. Čiegis.
- [74] J. Jachimavičienė. *Solution of a pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions by the finite difference method (Pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis sprendimas baigtinių skirtumų metodu)*. PhD thesis, Vilnius University, 2013. https://www.mii.lt/files/doc/lt/doktorantura/apgintos_disertacijos/mii_dis_2013_jachimaviciene.pdf. Supervisor: Prof. M. Sapagovas.
- [75] K. Jakubėlienė. *Solution of a two-dimensional parabolic equation with an integral condition by the finite-difference method (Dvimatės parabolinės lygties su integraline sąlyga sprendimas baigtinių skirtumų metodu)*. PhD thesis, Vilnius University, 2013. https://www.mii.lt/files/doc/lt/doktorantura/apgintos_disertacijos/mii_dis_2013_jakubeliene.pdf. Supervisor: Prof. M. Sapagovas.

- [76] S. Sajavičius. *Numerical analysis of differential problems with nonlocal initial and boundary conditions (Diferencialinių uždavinių su nelokaliosiomis pradinėmis ir kraštinėmis sąlygomis skaitinė analizė)*. PhD thesis, Vilnius University, 2013. http://vddb.library.lt/fedora/get/LT-eLABa-0001:E.02~2013~D_20130919_161247-10606/DS.005.1.01.ETD. Supervisor: Prof. F. Ivanauskas.
- [77] A. Skučaitė. *Investigation of the spectrum for Sturm–Liouville problem with a nonlocal integral boundary condition (Šturmo ir Liuvilio uždavinio su integraline nelokaliaja sąlyga spektro tyrimas)*. PhD thesis, Vilnius University, 2016. <http://talpykla.elaba.lt/elaba-fedora/objects/elaba:18269156/datastreams/MAIN/content>. Supervisor: Prof. A. Štikonas.
- [78] J. Novickij. *On the stability of finite difference schemes for hyperbolic equation with nonlocal integral boundary conditions (Baigtinių skirtumų schemų hiperbolinei lygčiai su integralinėmis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis stabilumo tyrimas)*. PhD thesis, Vilnius University, 2016. <http://talpykla.elaba.lt/elaba-fedora/objects/elaba:18225514/datastreams/MAIN/content>. Supervisor: Prof. A. Štikonas.
- [79] G. Paukštaitė. *Generalized Green’s Functions for Problems with Nonlocal Conditions (Apibendrintosios Gryno funkcijos uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis)*. PhD thesis, Vilnius University, 2018. <http://talpykla.elaba.lt/elaba-fedora/objects/elaba:33145090/datastreams/MAIN/content>. Supervisor: Prof. A. Štikonas.
- [80] K. Bingelė. *Investigation of Spectrum for a Sturm–Liouville problem with Two-Point Nonlocal Boundary Conditions (Šturmo ir Liuvilio uždavinio su dvitaške nelokaliaja sąlyga spektro tyrimas)*. PhD thesis, Vilnius University, 2019. http://mif.vu.lt/lt3/dokumentai/dokumentai/Doktorantura/2019-11-18_Bingele_santrauka.pdf. Supervisor: Prof. A. Štikonas.
- [81] A. Nečiporenko. *Mathematical Modeling of Bioreactor Control (Bioreaktoriaus valdymo matematinis modeliavimas)*. PhD thesis, Vilnius University, 2021. http://mif.vu.lt/lt3/dokumentai/dokumentai/Doktorantura/2021-08-16_NECIPORENKO_disertacija.pdf. Supervisor: Prof. F. Ivanauskas.