

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas

MIFODIJUS SAPAGOVAS

DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ MOKSLINIAI TYRIMAI
LIETUVOS MA MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTE

Apžvalga

Vilnius

2025

Įžanga

Šioje apžvalgoje rašoma apie vienos iš matematikos mokslo šakų, diferencialinių lygčių tyrimus, pradėtus prieš 60–70 metų tuometiniame Lietuvos mokslų akademijos Fizikos ir matematikos institute. Šiek tiek anksčiau Lietuvoje prasidėję tikimybių ir skaičių teorijos tyrimai jau buvo žinomi pasaulyje.

Prieš 60–70 metų gavę šiokių tokių žinių apie kompiuterius manėme, kad kompiuteriai patys už mus išspręs mūsų uždavinius. Greitai supratome, kad daugelio technologinių problemų, nemokėdami analizuoti diferencialinių lygčių, išspręsti negalėsime. Trumpai tariant, įsigiję kompiuterius supratome, kad kuo sudėtingesnį uždavinį norime išspręsti kompiuteriu, juo daugiau reikės matematinių žinių.

Ši apžvalga yra šeštas mano darbas apie tai, kas buvo daroma Matematikos ir informatikos institute ir jo pirmtakuose, siekiant sėkmingai taikyti diferencialines lygtis mokslo ir technologijų uždaviniams spręsti.

1. Profesorius Ottas Theodoras Volkas (Folkas, Otto Theodor Volk) Lietuvos universitete

Pirmieji Lietuvoje matematikos mokslo tyrimai, susiję su diferencialinėmis lygtimis, pradėti praeito amžiaus trečiajame dešimtmetyje Lietuvos universitete Kaune.

1918 m. vasario 16d. Lietuvos Tarybai paskelbus nepriklausomybę, tų pačių metų lapkričio 15d. pradėtas svarstyti Vilniaus universiteto atkūrimas. Nutarta Vilniaus universitetą atgaivinti nuo 1919 m. sausio 1 d. Tačiau šis nutarimas nebuvo įgyvendintas, nes sausio pradžioje Vilnių okupavo raudonoji armija. Marionetinė V. Kapsuko vyriausybė ir vėliau Vilnių okupavusios Lenkijos vyriausybė nusprendė atkurti Vilniaus universitetą, tačiau šie nutarimai liko tik popieriuje.

1919 m. lenkų legionieriams okupavus Vilnių, daugelis lietuvių inteligentų, kurie rūpinosi Vilniaus universiteto atkūrimu, persikėlė į Kauną. Aktyviai dalyvaujant gerai žinomiems mokslo, kultūros ir politikos atstovams (Zigmui Žemaičiui, Tadui Ivanauskui, Juozui Tūbeliui, Pranui Mašiotui ir daugeliui kitų) Kaune 1920m. sausio 27 d. buvo įsteigti Aukštieji kursai, kurie 1922 m. vasario 16 d. pertvarkyti į Lietuvos universitetą (1930 metais pavadintas Vytauto Didžiojo universitetu, 1940 m. – Kauno universitetu). Lietuvos universiteto Matematikos–gamtos fakultete (MGF) buvo 22 katedros, iš jų dvi matematikos: Geometrijos ir Matematinės analizės. Iš pradžių abiejose katedrose nebuvo nė vieno matematiko, turinčio mokslo laipsnį.

Fakulteto dekanu 1922 metais buvo išrinktas Zigmas Žemaitis, šiose pareigose dirbęs iki perkeliant fakultetą į Vilnių 1940 metais. Matematinės analizės katedrai iš pradžių laikinai vadovavo Z. Žemaitis, o nuo 1923 m. balandžio 1 d. tarptautinį konkursą laimėjęs Miuncheno universiteto privatdocentas O. Volkas (1892–1989) [1, 2, 11]. O. Volkui atvykus į Kauną, Lietuvoje prasidėjo moksliniai diferencialinių lygčių srities tyrimai.

O. Volkas gimė Vokietijoje, netoli Štutgarto. Baigęs vidurinę mokyklą, Tiubingeno universitete 1910–1914 metais studijavo katalikų teologiją, filosofiją ir matematiką. 1915 metais O. Volkas, baigęs kunigų seminariją, buvo išventintas į kunigus ir 1915 m. liepos 11 d. savo gimtojo miesto Noihauzeno bažnyčioje aukojo pirmąsias mišias. Tačiau kaip pats vėliau rašė, jis labiausiai buvo linkęs prie matematikos. Todėl jau po kelių mėnesių pratęsė studijas Tiubingeno ir Miuncheno universitetuose. 1918 metais Miuncheno aukštojoje technikos mokykloje O. Volkui buvo suteiktas mokslinis inžinerijos daktaro laipsnis, o 1920 metais apgynęs kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos disertaciją, gavo mokslinį filosofijos daktaro laipsnį. O tada pasirodė skelbimas apie tarptautinį konkursą į Matematinės analizės katedros vedėjo pareigas Lietuvos universitete Kaune.

Į Kauną O. Volkas atvyko jau kaip žinomas kompleksinio kintamojo funkcijų ir diferencialinių lygčių tikrinių funkcijų specialistas.

Dirbdamas Kaune O. Volkas išplėtė savo mokslo tyrimų tematiką: tyrė kompleksinio kintamojo ir specialiąsias funkcijas, diferencialines lygtis, kraštinius potencialų teorijos uždavinius. Pradėjęs dirbti Kaune, prof. O. Volkas fakulteto darbuose vokiečių kalba paskelbė tris dar Miuncheno universitete atliktus potencialų teorijos tyrimus. Mokslinio darbo rezultatus, gautus Kaune, O. Volkas daugiausia publikavo įvairiuose Vokietijos moksliniuose žurnaluose. O. Volko iniciatyva tik jam atvykus į Kauną, buvo įsteigtas mokslinis seminaras, iš Vokietijos nupirktas turtinga matematikos žurnalų ir knygų biblioteka. Jam tarpininkaujant, Matematikos–gamtos fakulteto dėstytojais matematikai stažavosi įvairiuose Vokietijos universitetuose.

O. Volkas yra pirmojo lietuvių kalba parašyto aukštosios matematikos vadovėlio autorius: 1923 metais buvo atspausdintas diferencialinių lygčių vadovėlis „Paprastųjų ir dalinių diferencialinių lygčių teorijos paskaitos“. Į lietuvių kalbą vokiškai parašytą tekstą išvertė studentai (pagrindinis vertėjas – Vytautas Paulauskas). Tai didelės apimties, virš 500 puslapių, originalus aukšto matematinio lygio vadovėlis. Pirmojoje dalyje išdėstyta paprastųjų diferencialinių lygčių (pirmosios eilės, aukštesniųjų eilių ir diferencialinių lygčių sistemų) teorija, integravimo metodai ir sprendinių egzistavimo įrodymai. Antrojoje, mažesnės apimties dalyje nagrinėjamos pirmosios ir antrosios eilės dalinių išvestinių diferencialinės lygtys. Lietuviškus terminus parinkti padėjo universiteto garbės profesorius A. Dambrauskas (A. Jakštas).

Šios apžvalgos autorius turėjo galimybę ir malonumą pasklaidyti vadovėlio egzempliorių, kurių O. Volkas buvo dovanojęs kolegai chemijos profesoriui P. Šivickiui.

Vadovėlyje atskiru skyriumi išdėstytas Runge's ir Kuttos metodas paprastosioms diferencialinėms lygtims ir jų sistemoms spręsti. Dabar šis metodas yra vienas iš pamatinių skaitinės analizės metodų, o prieš 100 metų jis buvo dar tik kuriamas, tobulinamas ir diskutuojamas, tuo metu retai teįtraukiamas į vadovėlius.

Per visus darbo Kaune metus O. Volkas vienintelis iš matematikos dėstytojų studentams formulavo diplominių darbų temas. Tokių darbų buvo 31 [11].

Dirbdamas Kauno universitete, O. Volkas publikavo ne tik mokslinius straipsnius iš potencialų teorijos, diferencialinių lygčių ir funkcijų teorijos, bet parašė ir nemažai mokslo populiarinamųjų straipsnių.

1930 metų pavasarį O. Volkas išvyko dirbti į Viurcburgo universitetą. Grįžęs į Vokietiją, O. Volkas dar vadovavo Vytauto Didžiojo universiteto studentų diplominiams darbams. Išvykus O. Volkui, dauguma studentų matematikų diplominius darbus rašė vadovaujami P. Katiliaus. P. Katilius taip pat skaitė diferencialinių lygčių kursą, gal todėl beveik pusė diplominių darbų buvo iš diferencialinių lygčių ir jų sprendinių savybių tyrimo.

2. Pirmieji pokario dešimtmečiai.

Vilniaus universiteto Fizikos ir matematikos fakultetas

1939 m. spalio 10 d. SSRS ir Lietuvos sutartimi Lietuvai buvo grąžintas Vilnius ir tuoju pat iškilo klausimas apie lietuviško universiteto steigimą Vilniuje. 1939 m. gruodžio 13 d. Lietuvos respublikos Seimas priėmė nutarimą, kuriame paskelbta, kad Lietuvoje yra du universitetai – Vilniaus universitetas ir Vytauto Didžiojo universitetas.

Lietuvos ministrų taryba 1939 m. pabaigoje perkėlė VDU Matematikos–gamtos fakultetą į Vilnių. Karas ir Lietuvos okupacija sutrikdė universitetų darbą, juo labiau juose vykdytus mokslinius tyrimus.

Palyginti sėkminga Vytauto Didžiojo universiteto veikla matematikos tyrimų srityje tapo paruošiamuoju etapu naujųjų laikų matematikos mokslui Lietuvoje atsirasti ir plėtotis [9]. Tačiau reikėjo dar maždaug poros dešimtmečių iki prasidėjo tikras mokslinis darbas. Ir ši tikroji matematikos mokslinių tyrimų pradžia sietina su Vilniaus universitetu.

Vilniaus universiteto matematikai po karo pradėjo nagrinėti daug naujų uždavinių iš skaičių teorijos, geometrijos, diferencialinių lygčių, funkcijų teorijos ir kitų matematikos kryptių. Jonas Kubilius (1921–2011), po karo baigęs matematikos studijas Vilniaus universitete ir aspirantūrą Sankt Peterburgo universitete, sukūrė pasaulyje pripažintą naują matematikos mokslo kryptį – tikimybinę skaičių teoriją [45]. Matematinės analizės katedroje viena pagrindinių nagrinėjamų problemų buvo įvairių lygčių (diferencialinių, integralinių, skirtuminių) analizinių, ne skaitinių, sprendinių savybių tyrimas. Antroji tyrimų kryptis – tiesinių ir netiesinių diferencialinių lygčių ir jų sistemų sprendinio struktūra (Vyt. Paulauskas, Š. Strelicas, A. Nagelė, A. Miškelevičius, L. Navickaitė, E. Neniškytė).

Pirmąjį mokslinį straipsnį diferencialinių lygčių tema pokario Vilniaus universitete 1958 m. paskelbė Š. Strelicas (1923–1999). Vėliau Š. Strelicas emigravo į Izraelį; ten iki mirties dirbo profesoriumi Haifos universitete. Jam išvykus, Lietuvoje jo plėtota kryptis nebuvo tęsiama.

Praeito šimtmečio šeštajame – aštuntajame dešimtmetyje Lietuvoje, kaip ir daugelyje kitų šalių, matematikos mokslinius tyrimus labai įtakojo kompiuterių, tada vadintų elektroninėmis skaičiavimo mašinomis (ESM), kūrimas ir naudojimas. Vilniaus universitete 1959 metais pavasario semestre trečio ir ketvirto kurso matematikos specialybės studentams buvo įvesta nauja specializacija – skaičiavimo matematika. 1960 metais įsteigta Skaičiavimo matematikos katedra, po kelerių metų pervadinta Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos katedra. Šios katedros dėstytojai Petras Golokvosčius (1923–2009), Vytautas Merkys (1930–2024), Juozas Degutis (1936–2014) nagrinėjo kokybinės paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos ir kitus artimus uždavinius. Vėliau, grįžus į

katedrą Maskvos Lomonosovo universiteto absolventams F. Ivanauskui, A. Štarui, A. Kregždei ir kitiems mokslininkams, pagrindinė katedros mokslinių tyrimų kryptis tapo dalinių išvestinių diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai, skaitiniai jų sprendimo metodai ir taikymai. Praeito šimtmečio septintojo dešimtmečio pabaigoje Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos katedra tapo stipriu diferencialinių lygčių teorijos, skaitinių metodų ir taikymų mokslinių tyrimų centru Lietuvoje tiek pagal mokslo rezultatus, tiek pagal specialistų rengimo kokybę.

Plačiau apie diferencialinių lygčių mokslinius tyrimus Vilniaus universitete iki 2006 m. galima rasti [7, 10] straipsniuose.

3. Lietuvos MA Fizikos ir matematikos institutas. Diferencialinių lygčių mokslinio padalinio įsteigimas

Šioje straipsnio dalyje panagrinėsime ir komentuosime svarbią mūsų tyrimo dalį – kaip Lietuvos MA atsirado diferencialinių lygčių mokslinis padalinys.

Diferencialinių lygčių tyrimai buvo pradėti MA Fizikos ir matematikos institute, kuriam vadovavo fizikas teoretikas prof. Adolfas Jucys (1904–1974), o prof. Jonas Kubilius buvo direktoriaus pavaduotojas (nuo 1969 metų – prof. V. Statulevičius). Prof. A. Jucio moksliniai interesai buvo tiesiogiai susiję su didelės apimties skaičiavimais, todėl jis nuolat domėjosi, kaip įsigyti tinkamą skaičiavimo įrangą. J. Kubilius, studijuodamas Leningrade aspirantūroje, įgijo patikimų realistiškų žinių apie elektronines skaičiavimo mašinas ir jų galimybes. Jis pirmasis Lietuvoje pradėjo svarstyti ir diskutuoti, kaip Lietuvos matematikai turėtų joms ruošti, kokius turėtų pradėti tyrimus, kad kompiuteriais būtų naudojamasi veiksmingai ir našiai. 1960 metais Lietuvos MA prezidiumas A. Jucio iniciatyva nutarė Fizikos ir matematikos institutui nupirkti ESM BESM-2, tuo metu galingiausią SSRS gamintą ESM. J. Kubilius su V. Statulevičiumi išsiaiškino, kurių matematikos mokslo sričių specialistus pirmiausia reikia rengti Lietuvoje, pasitinkant artėjančią kompiuterių ir informacinių technologijų erą, todėl šalia tikimybių teorijos, matematinės statistikos ir skaičių teorijos kryptių, kuriose tuo metu jau buvo vykdomi moksliniai tyrimai Lietuvoje, pasiūlyta orientuotis ir į matematinę logiką, matematinę ekonomiką, diferencialinių lygčių teoriją ir jų skaitinius sprendimo metodus.

Viena svarbesnių datų, susijusių su diferencialinių lygčių tyrimo pradžia Lietuvos mokslų akademijoje, galima laikyti 1961 m. gruodžio 1 d. Tą dieną trys jauni Fizikos ir matematikos instituto darbuotojai, Vilniaus universiteto absolventai buvo priimti į FMI aspirantūrą ir nedelsiant išsiųsti tobulintis diferencialinių lygčių srityje į kitus SSRS mokslo centrus, kuriuos surado ir su būsimais aspirantų vadovais susitarė V. Statulevičius. Taigi, Liudvikas Stupelis (1936–2015) išvyko trejiems metams į Sankt Peterburgo universitetą pas gerai žinomą diferencialinių lygčių specialistę prof. O. Ladyženskają, Bronislavas Kvedaras – pas ne mažiau garsų diferencialinių lygčių ir funkcinės analizės specialistą prof. S. Kreiną Voronežo universitete. Dar vienas aspirantas, šių eilučių autorius

Mifodijus Sapagovas, išvyko į Ukrainos MA skaičiavimo centrą. M. Sapagovui vadovavo tuo metu jau daug mokslo daktarų parengęs netiesinių diferencialinių lygčių sprendimo metodų specialistas prof. V. Šamanskis.

Visi trys instituto aspirantai sėkmingai baigė studijas ir grįžę į Vilnių pradėjo dirbti instituto Matematinės logikos ir programavimo sektoriuje; tuo metu institute dar nebuvo diferencialines lygtis tiriančio mokslinio padalinio. 1965 metų pradžioje FMI Tarybai patvirtinus planinę instituto veiklos temą „Diferencialinių lygčių, susijusių su optimizavimo procesais, tyrimas ir sprendimas“, Fizikos ir matematikos institute prasidėjo nuoseklūs diferencialinių lygčių tyrimai.

Diferencialinių lygčių tyrimų plėtra sutapo su Fizikos ir matematikos instituto augimu ir 1967 metais įvykusia reorganizacija. Iš pradžių 1956 metais įkurtame Fizikos ir matematikos institute dirbo apie 40 darbuotojų, o iš jų – tik keli matematikai: Matematikos sektoriaus vadovas J. Kubilius, jo aspirantas R. Uždavinyš, jaunesnysis mokslo darbuotojas L. Gabrelianas, vyresnioji laborantė R. Merkytė. Tačiau per 10 metų instituto darbuotojų padidėjo daugiau negu 10 kartų.

Institute tuo metu buvo keletas matematikos mokslinių padalinių ir 1962 m. įkurtas Skaičiavimo centras su ESM BESM-2M. Instituto tikimybių teorijos mokslininkų rezultatai jau buvo matomi ir aukštai vertinami pasaulyje.

1967 m. sausio 1 d. nuo FMI atsiskyrė Pusuaidininkų fizikos institutas. Likusiame Fizikos ir matematikos institute buvo du mokslo padaliniai: Matematikos ir kibernetikos bei Fizikos sekcijos. Matematikos ir kibernetikos sekcijoje buvo penki moksliniai sektoriai ir skaičiavimo centras su dviem techninėmis laboratorijomis ir dviem sektoriais – Programavimo ir uždavinių sprendimo sektorius (PUSS, vadovas B. Kvedaras) ir Skaitinių metodų sektorius (SMS, vadovas M. Sapagovas). Abu sektoriai turėjo planinių ir einamųjų užduočių, susijusių su institute esančių ar Lietuvoje kuriamų ESM programine įranga. Šių mokslinių sektorių pagrindinis tyrimo objektas buvo diferencialinės lygtys. Teoriniai diferencialinių lygčių tyrimai pamažu koncentravosi PUSS'e, o diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai – SMS'e.

1977 metais Programavimo ir uždavinių sprendimo sektorius pervadinamas Diferencialinių lygčių sektoriumi (DLS), atsižvelgiant į pagrindinę sektoriaus tyrimų kryptį.

Minėjome, kad 1966 metais įsteigus DLS, jame tebuvo du darbuotojai su mokslo laipsniu – B. Kvedaras ir L. Stupelis. Tačiau žiūrintį to meto diferencialinių lygčių veiklą iš šių dienų pozicijų, galima tvirtinti, kad tyrimų pradžia buvo sudarytos tinkamos sąlygos ir palankiai susiklostė aplinkybės. B. Kvedaro ir L. Stupelio disertacijų vadovai O. Ladyženskaja ir S. Kreinas, gerai žinomi aukšto lygio matematikai, įvedė savo aspirantus į šiuolaikinių problemų ratą. Studijuodami aspirantūroje, šie Lietuvos matematikai užmezgė pirmuosius ryšius su kitų universitetų mokslininkais, dirbančiais artimose srityse, kuriuos palaikė ir plėtojo grįžę į Lietuvą. V. Statulevičius, inicijavęs šias aspirantūros studijas, 1966 metų pabaigoje tapo FMI direktoriumi, ir toliau rūpinosi šia matematikos

ška.

ESM naudojimo įvairiose mokslo ir technikos srityse kilimas skatino kurti ir naudoti naujais, sudėtingesniais matematiniais modeliais (pavyzdžiui, kraštiniais diferencialinių lygčių uždaviniais). Daugeliu atvejų kitų mokslo sričių atstovai, patyrę naujų uždavinių formulavimo ir modelių kūrimo sunkumus, kreipdavosi pagalbos į matematikus.

Dar viena palanki aplinkybė, paskatinusi spręsti svarbius šiuolaikinius diferencialinių lygčių uždavinius susidarė prasidėjus Lietuvos matematikų bendradarbiavimui su Novosibirsko matematikos institute dirbančiu garsiu diferencialinių lygčių specialistu profesoriumi Algimantu Janušausku (1935–1999).

4. Mokslinių tyrimų tematika ir rezultatai

4.1. Kraštiniai uždaviniai paprastosioms diferencialinėms lygtims su integraline sąlyga

Plėtojant Vilniaus universitete atliekamus analizinės diferencialinių lygčių teorijos tyrimus, Bronius Kvedaras Fizikos ir matematikos institute pradėjo nagrinėti paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų kraštinius uždavinius ir pirmosios eilės netiesinių lygčių sistemas su integralinėmis sąlygomis vietoj įprastinių sąlygų kraštiniuose taškuose. Gauti nauji rezultatai apie apibendrintąją Gryno funkciją, nustatytos sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygos. Ištirtos Šturmo ir Liuvilio uždavinio tikrinių reikšmių ir tikrinių funkcijų savybės. Įdomu pastebėti, kad tuo metu (XX amžiaus septintajame dešimtmetyje) daugelyje šalių irgi ką tik buvo prasidėję intensyvūs kraštinių uždavinių įvairaus tipo diferencialinėms lygtims su integralinėmis ar kitokio tipo nelokaliosiomis sąlygomis tyrimai. Tai atitiko aktualias taikomąsias mokslo tendencijas – kurti, nagrinėti ir naudoti naujais matematiniais modeliais.

Bronius Kvedaras yra diferencialinių lygčių kraštinių uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis tyrimų pradininkas Lietuvoje. Jonas Macionis, kurio moksliniams darbams vadovavo B. Kvedaras, taip pat nagrinėjo diferencialinių lygčių su integralinėmis sąlygomis apibendrintąją Gryno funkciją ir tikrinių reikšmių spektro savybes ir pirmasis Lietuvoje (1977 m.) apgynė mokslų kandidato disertaciją iš kraštinių uždavinių su integralinėmis sąlygomis srities.

4.2. Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių uždaviniai

Liudvikas Stupelis, 1967 m. apgynęs mokslų kandidato disertaciją, toliau tęsė tyrimus, pradėtus aspirantūroje Sankt Peterburge. Bendradarbiaudamas su Sankt Peterburgo matematikais O. Ladyženskaja, V. Mazja, V. Plamenevskiu ir kt., nagrinėjo antrosios eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių mišriuosius uždavinius. Tai diferencialinės lygtys, kurių lygties tipas kinta atskirose nagrinėjamos srities dalyse: vienoje srities dalyje lygtis yra elipsinė, kitoje – hiperbolinė, o jas skiriančiame paviršiuje – parabolinė. Išnagrinėjo tokių diferencialinių lygčių sprendinių egzistavimo, vienaties bei glodumo sąlygas Sobolevo ir Hiolderio erdvėse, tikrinių reikšmių spektro savybes bei taikymus hidrodinamikos uždaviniuose. Pagal būdo savybes L. Stupelis buvo linkęs dirbti individualiai, parašė tris monografijas (vieną su bendraautorais iš Sankt Peterburgo [46, 49, 59]). 1996 metais Sankt Peterburge apgynė habilitacinį darbą „Vientisųjų terpių magnetinės hidrodinamikos matematiniai klausimai“.

4.3. Išsigimstančios elipsinės lygtys

Išsigimstančių elipsinių lygčių teorija praeito šimtmečio aštuntajame dešimtmetyje užėmė svarbią vietą Diferencialinių lygčių skyriaus mokslo tiriamųjų darbų sąrašė. Moksliniai tyrimai šia tema pavadinimą pakeitusiame Lietuvos MA Matematikos ir kibernetikos institute prasidėjo nuo bendradarbiavimo su Novosibirske dirbusiu profesoriumi Algimantu Janušausku (1935–1998). A. Janušauskas, gimęs Lietuvoje, 1940 metais su tėvais buvo ištremtas į Sibirą, 1960 metais baigė Irkutsko universitetą, 1974 metais tapo habilituotu mokslų daktaru. Iš pradžių A. Janušauskas ir DLS darbuotojai kartu nagrinėjo bendras temas, gyvendami ir dirbdami skirtinguose pasaulio kraštuose. Vėliau A. Janušauskas atsikėlė į Vilnių ir 1987–1994 metais dirbo MKI Diferencialinių lygčių sektoriuje vyresniuoju mokslo darbuotoju. A. Janušauskas išnagrinėjo ortogonalųjų polinomų taikymą silpnai išsigimstančioms elipsinėms lygtims, ištyrė pseudodiferencialinių operatorių klases, susijusias su išsigimstančiomis elipsinėmis lygtimis. Kitas įdomus A. Janušausko tyrimų objektas buvo kraštiniai uždaviniai su pasvirąja išvestine bei jų ekvivalentiškumo Fredholmo integralinėms lygtims sąlygos. Paminėjome tik mažą A. Janušausko išspręstų problemų dalį. Gausūs jo moksliniai rezultatai išdėstyti trylikoje monografių.

Būtų nelengva atskirti, kurie A. Janušausko rezultatai gauti Novosibirske, kurie Vilniuje. Tai ir nėra būtina. Būtina pastebėti, kad greta mokslinių rezultatų, svarbus A. Janušausko indėlis į Lietuvos mokslą yra jo parengti mokslo daktarai, sprendžiantys šiuolaikines matematikos problemas.

Pirmasis A. Janušausko aspirantas iš Lietuvos buvo Stasys Rutkauskas (1951–2018), apgynęs disertaciją 1978 metais. Disertacijoje ir vėlesniuose moksliniuose straipsniuose S. Rutkauskas nagrinėjo stipriai išsigimstančių elipsinių lygčių sistemų kraštinius uždavinius. Jo moksliniuose darbuose nustatytos sąlygos, kuriomis srities kontūro taškuose išsigimstančių lygčių sistemų Dirichle

uždavinys yra neišsprendžiamas. Išnagrinėta, kokiomis sąlygomis taške ar hipertiesėje išsigimstančios sistemos turi vienintelį sprendinį. Paskutiniuose straipsniuose S. Rutkauskas nagrinėjo problemas, susijusias su maksimumo principo taikymu išsigimstančioms lygtims.

Keletas A. Janušausko aspirantų, sėkmingai apsigynusių disertacijas, dirba Lietuvos universitetuose. Donatas Jurgaitis išnagrinėjo daugiamates pirmosios eilės elipsines sistemas, ištyrė sprendinių asimptotiką, sudarė sprendinių skleidinius apibendrintomis laipsninėmis ir faktorialinėmis eilutėmis bei apibendrintais Laplaso integralais. A. Janušausko aspirantės Vidos Stukaitės disertacijoje išnagrinėtos elipsinės lygties, išsigimstančios srities dalyje, sprendinio savybės ir nurodytos sąlygos, kuriomis egzistuoja taškinis tikrinių reikšmių spektras.

Gintaras Puriuskis nagrinėjo išsigimstančius n -tosios eilės operatorius ir nurodė, kaip galima pašalinti sprendinio ypatumus. Šios temos ištakos yra klasikinė Rymano holomorfinių ypatumų šalinimo teorema. Disertacijoje G. Puriuskis išnagrinėjo stipriai išsigimstančios lygties trimačio cilindro ašies taškuose sprendinių asimptotines savybes. Apgynęs disertaciją (1997 m.), G. Puriuskis dirbo Vilniaus universitete, vėliau – KTU Panevėžio fakultete.

Bronius Kvedaras, tęsdamas A. Janušausko pradėtus Fukso lygties tyrimus, išsamiai išnagrinėjo išsigimstančią elipsinę lygtį su analiziniais koeficientais. Jis nustatė tokių lygčių sprendinių struktūrą ir savybes išsigimimo daugdaros aplinkoje. Modifikavęs Puankare metodą, sprendinius išreiškė Laplaso integralais. Įrodė, kad egzistuoja dvi sprendinių šeimos, turinčios eksponentinius ir laipsninius išsigimimus.

4.4. Diferencialinės lygtys su vėluojančiu argumentu

1971 metais baigęs matematikos studijas Vilniaus universitete, į Fizikos ir matematikos instituto aspirantūrą Diferencialinių lygčių sektoriuje buvo priimtas Donatas Švitra (1946–2019). Jam vadovavo Jaroslavljo universiteto profesorius J. Kolesovas, pasiūlęs gilintis į naują diferencialinių lygčių srities kryptį – diferencialines lygtis su vėluojančiu argumentu. Tokiomis lygtimis reiškiami dinaminiai fizikos, technikos, biologijos ir medicinos savireguliacijos procesai.

Apgynęs mokslų kandidato disertaciją (1975 m.), D. Švitra FMI Diferencialinių lygčių sektoriuje tęsė pradėtus tyrimus ir per keletą metų subūrė bendraminčių tyrėjų grupę.

Kartu su J. Kolesovu D. Švitra, tirdamas netiesinių diferencialinių lygčių sprendinių stabilumą periferiniuose apibrėžimo srities taškuose, atrado neutralų lygčių bifurkacijos fenomeną, kai vėlavimas priklauso nuo sprendinio. Išnagrinėjo n -tosios eilės lygtis su vėlavimu ir šių lygčių sprendinių harmoninius svyravimus. Dalis šių rezultatų aprašyti [44]monografijoje.

D. Švitra išsamiai ištyrė Hatčinsono populiacijos dinamikos lygties modifikacijas ir apibendrinimus. Remdamasis gautais rezultatai, kartu su mokiniais ir bendradarbiais (R. Grikienui, R. Jančausku, E. Jančiu, J. Basovu ir kt.) sudarė ir ištyrė daugybę ekologijos, biologijos, fizikos ir medicinos modelių, reiškiamų diferencialinėmis lygtimis su vėluojančiu argumentu. Sudarė ir

išnagrinėjo cukraus lygio kraujyje dinaminį modelį, kurio rezultatai taikomi gydant diabetą, Drūkšių ežero bei Kuršių marių biologinių makrosistemų populiacijos ir kitus dinامينius modelius. Rezultatai apibendrinti [50] monografijoje. 1988 metais Sankt Peterburge D. Švitra apgynė fizikos – matematikos mokslų daktaro (habilituoto daktaro) disertaciją.

1987 metais Matematikos ir kibernetikos institute, atskyrus nuo Diferencialinių lygčių skyriaus, įkuriamas Ekologinių problemų skyrius, kuriam vadovauti paskiriamas D. Švitra. Dar po dvejų metų (1990 m.) Ekologinių problemų skyrius reorganizuojamas į Lietuvos MA Ekosistemų analizės centrą ir perkeliamas į Klaipėdą.

4.5. Hidrodinamikos lygtys

1972–1973 metais FMI direktorius V. Statulevičius ėmėsi iniciatyvos išsiųsti keletą Vilniaus universiteto matematikos studentų į studijas Sankt Peterburgo universitete, siekdamas Lietuvai parengti keletą specialistų pagal sustiprintą diferencialinių lygčių programą. Susitarus su abiejų universitetų rektoriais ir atlikus reikalingus formalumus, 1973 metų rudens semestrą studijuoti Sankt Peterburgo universitete išvyko šeši VU antrą kursą baigę matematikos specialybės studentai.

1977 metais šeši jauni specialistai su Sankt Peterburgo universiteto diplomais grįžo į Lietuvą, pasirengę spręsti diferencialinių lygčių teorijos ir taikymų problemas.

Trys iš šio šešeto – Eugenijus Paliokas, Konstantinas Pileckas ir Kazimieras Samaitis pradėjo dirbti FMI Diferencialinių lygčių sektoriuje, kuriame jau dirbo B. Kvedaras ir L. Stupelis. Jaunieji Lietuvos matematikai, turėdami kvalifikuotus mokytojus, pradėjo nagrinėti aktualius hidrodinamikos uždavinius – Navjė ir Stokso lygtis. Šiomis lygtimis, tiksliau, diferencialinių lygčių sistemomis, matematine kalba reiškiami pagrindiniai hidrodinamikos (skysčių tekėjimo) dėsniai. Teorinis šių modelių tyrimas yra svarbi ir sudėtinga problema. Sankt Peterburgo matematikų mokyklos atstovai O. Ladyženskaja, S. Nazarovas, V. Solonnikovas ir N. Uralceva priklauso pasauliniam Navjė ir Stokso tyrėjų elitui. V. Solonnikovui vadovaujant, K. Pileckas pradėjo nagrinėti Navjė ir Stokso lygčių išsprendžiamumo ir vienaties klausimus srityse su išėjimu į begalybę, ištyrė klampiojo nespūdaus skysčio tekėjimo uždavinį esant begaliniam laisvajam paviršiui ir sukūrė originalų iteracinį sprendimo algoritmą. Be to, K. Pileckas sukūrė naują metodiką Navjė ir Stokso bei korektiškiems Stokso lygčių sistemų uždaviniams srityse su išėjimu į begalybę formuluoti, pagal kurią nustatomos visos galimos asimptotikos sąlygos.

Kazimieras Samaitis nagrinėjo klampaus nespūdaus skysčio tekėjimą, aprašomą Navjė ir Stokso bei Stokso lygčių sistemomis srityse su nuliniiais kampais begalinėje juostoje. Tęsdami V. Solonnikovo tyrimus, K. Samaitis ir L. Stupelis išnagrinėjo nusistovėjusio skysčio plokščiąjį tekėjimą.

Aleksas Domarkas, Gintautas Gudynas ir Eugenijus Paliokas nagrinėjo matematinius modelius, reiškiamus kvazitiesinėmis elipsinių ir parabolinių lygčių sistemomis.

Algirdas Ambrazevičius 1977 metais įstojo į aspirantūrą Sankt Peterburgo universitete.

Vadovaujamas prof. N. Uralcevos, pradėjo nagrinėti skysčių paviršių formas, veikiamas kapiliarumo jėgų. Tirdamas minimaliųjų paviršių lygtis, įrodė kapiliarų lygties klasikinio sprendinio egzistavimą ir surado sprendinio gradiento įverčius. Reikia pastebėti, kad formuluodamas kraštinius uždavinius, A. Ambrazevičius įtraukė ne tik klasikines taškines kraštines sąlygas, bet ir integralines sąlygas, pavyzdžiui, sąlygą, reiškiančią žinomą skysčio tūrį. Apgynęs disertaciją, 1981 metais grįžo į Vilniaus universitetą ir tęsė mokslinius procesų skysčių paviršiuose tyrimus.

K. Pileckas kartu su bendraautorais visiškai išsprendė 70 metų laikytą neišsprendžiamą Leray problemą. Nemažiau svarbus Navjė ir Stokso lygčių tyrimas begaliniuose sluoksniuose ir begaliniuose cilindruose. K. Pileckas, laimėjęs Humboldto stipendiją, 1990–1992 m. stažavusi Europos universitetuose, po to keletą metų dirbo Paderborno universitete. Tai svariai prisidėjo prie mokslo rezultatų viešinimo ir sklaidos.

Lietuvos matematikų, Sankt Peterburgo universiteto auklėtinių, moksliniai rezultatai paskelbti ne tik moksliniuose žurnaluose – nemaža jų dalis pateikiama monografijose.

5. Seminarai, konferencijos, leidiniai

Siekdami pagyvinti ir paspartinti mokslinius tyrimus, dviejų FMI mokslinių padalinių DLS ir SMS vadovai B. Kvedaras ir M. Sapagovas sutarė rengti tęstinį atvirą mokslinį seminarą „Diferencialinės lygtys ir jų taikymai“ ir kviešti dalyvius iš visų suinteresuotų Lietuvos ir kitų SSRS respublikų mokslo įstaigų. Seminaras prasidėjo 1970 metų pabaigoje. Atskiru leidiniu buvo publikuojami ir seminaro darbai – tokiu pat pavadinimu pradėtas leisti mokslinis žurnalas, kuriam buvo suteiktas seminaro darbų statusas. Žurnalo leidėjas Fizikos ir matematikos institutas sugebėjo pasiekti, kad leidinio moksliniai straipsniai būtų referuojami dviejuose referatyviniuose žurnaluose, anglų ir rusų kalbomis. Straipsniai seminaro darbuose spausdinti rusų kalba su santrauka lietuvių ir anglų kalbomis. Ir seminaras, ir jo darbų leidinys gyvavo 20 metų. Pirmasis darbų numeris pasirodė 1971, o paskutinis, 47-tas – 1991 metais.

Iš viso seminaro darbuose straipsnius paskelbė daugiau negu 50 autorių iš Lietuvos. Įdomu, kad septynis kartus vieną žurnalo numerį sudarė tik vienas didelės apimties straipsnis. Kitaip tariant, seminaro darbuose buvo išleistos septynios monografijos.

1997 metais Diferencialinių lygčių skyrius Palangoje surengė tarptautinę konferenciją „Navier–Stokes Equations and related Nonlinear Problems“ (NSEC-6).

6. Taikomieji darbai

Plačiaja prasme sąvoka „diferencialinių lygčių tyrimai“ apima ne tik naujas teoremas apie sprendinių egzistavimą ir savybes, bet ir skaitinę analizę bei konkrečių, dažniausiai turinčių taikomąją reikšmę uždavinių, suformuluotų diferencialinių lygčių kalba, sprendimas. Diferencialinių lygčių tyrimas plačiaja prasme būdingas ir daugeliui Diferencialinių lygčių sektoriaus darbų. Konkrečių pavyzdžių galima rasti A. Ambrazevičiaus, B. Kvedaro, K. Pilecko ir D. Švitros straipsniuose. Tačiau sektoriaus mokslininkai sprendė ne tik teorinius, bet ir taikomuosius uždavinius, kurie dažnai išeidavo iš sektoriuje atliekamų teorinių tyrimų rato.

Praeito šimtmečio septintajame dešimtmetyje pradėjus aktyviau naudotis elektroninėmis skaičiavimo mašinomis, daugelis Lietuvos mokslo ir projektavimo institucijų ėmė kurti sudėtingesnius matematinius modelius. Manoma, kad galingos ESM pačios galės išspręsti tuos uždavinius, tačiau greitai paaiškėjo, kad sudėtingiems modeliams tirti ir susijusiems uždaviniams spręsti reikia kvalifikuotos matematikų pagalbos. Todėl FMI Diferencialinių lygčių ir Skaičiavimo metodų sektoriai dažnokai gaudavo pasiūlymų spręsti įvairius taikomuosius uždavinius. Kai kurie iš jų buvo įdomūs ne tik praktiniu, bet matematiniu požiūriu.

Atrinkau du tokius uždavinius, kuriuos sprendėme abiejų sektorių pastangomis. 1967 metais į institutą kreipėsi SSRS Geologijos ministerijos Vilniaus geologijos instituto atstovas V. Juodkasis siūlydamas išspręsti diferencialinį uždavinį, modeliuojantį požeminio vandens atsargų kiekius ir pokyčius įvairiuose Lietuvos regionuose. Matematiniu požiūriu reikėjo išspręsti antrosios eilės parabolinę lygtį su ne visiškai apibrėžtomis kraštinėmis sąlygomis. Su Lietuvos hidrogeologais buvo bendradarbiauta daugelį metų. Jų pasiūlytas uždavinys vėliau peraugo į disertaciją (Ona Dulkytė. „Hidrogeologinių parametrų skaičiavimo metodika naudojant ESM“, 1986, vadovai N. Ogilvi, B. Kvedaras).

Antras uždavinys yra iš radiotechnikos srities, kurį spręsti užsakė Vilniaus Radijo matavimo prietaisų mokslo tiriamasis institutas. Užsakovas pateikė visiškai ir korektiškai suformuluotą matematinį modelį, tik nemokėjo jo spręsti. Tai buvo diferencialinių operatorių atvirkštinis tikrinių reikšmių uždavinys sudėtingoje geometrinėje pjautuvo formos srityje. Sritis gaunama iš didesnio spindulio skritulio išmetus necentruotai įbrėžtą mažesnio spindulio skritulį ir gauto žiedo siauriausioje vietoje dar iškirpus siaurą juostelę. Modelio tyrimo tikslas – rasti tokius srities parametrus, su kuriais žinomo diferencialinio operatoriaus kelios (paprastai dvi) mažiausios tikrinės reikšmės tenkintų tam tikrą dėsnį.

Matematine prasme tai yra sudėtingas diferencialinių lygčių skaitinės analizės uždavinys. Po kelerių tyrimo metų šis uždavinys taip pat tapo disertacija (Dangutė Sapagovienė. „Elipsinių diferencialinių operatorių tikrinių reikšmių uždavinio sprendimas skirtuminiais metodais“, 1976, vadovas B. Kvedaras).

7. Apibendrinimai ir išvados

Diferencialinių lygčių skyrius tuometiniame Fizikos ir matematikos institute buvo įsteigtas tuo metu, kai institutas, kaip ir daugelis kitų Lietuvos Mokslų akademijos institutų, augo ir stiprėjo. Institutui plečiantis, didėjo ir Diferencialinių lygčių skyrius. Antrąjį skyriaus gyvavimo dešimtmetį skyriuje dirbo apie 20 mokslinių darbuotojų ir aspirantų. 1989 metais įsteigus atskirą Matematinės ekologijos grupę, Diferencialinių lygčių skyriuje 1990 metais skyriuje liko 12 mokslo darbuotojų, iš jų 1 habilituotas mokslų daktaras ir 9 mokslų daktarai.

Bronius Kvedaras skyriui vadovavo nuo pat skyriaus įkūrimo 1967 metais iki 1998 metų (atsistatydino dėl amžiaus). Nors monografijos iš diferencialinių lygčių teorijos neparašė, išleido unikalų dviejų tomų traktatą apie matricas [27, 28] ir literatų gerai įvertintą prisiminimų knygą apie gimtąjį kaimą. Apžvalginis B. Kvedaro straipsnis [11] yra išsami skyriaus vadovo ataskaita apie bendradarbių mokslinius rezultatus, gautus tuo laiku, kai jis vadovavo skyriui.

1998–2008 metais Diferencialinių lygčių skyriaus vadovu dirbo Konstantinas Pileckas. Tuo metu Lietuvoje, vykstant mokslo ir mokslinių įstaigų reformai, moksliniai tyrimai iš mokslinių institutų kėlėsi į universitetus. Vykstant šioms pertvarkoms, 2006 metais Matematikos ir informatikos instituto Diferencialinių lygčių skyriuje liko tik du mokslo darbuotojai, habil. dr. K. Pileckas, dr. S. Rutkauskas ir du doktorantai K. Aldošina ir V. Keblikas.

Šioje apžvalgoje neminėjome dar vienos mokslinių tyrimų krypties, vykdytos Matematikos ir informatikos institute, kurią galima priskirti diferencialinių lygčių sričiai: stochastinių diferencialinių lygčių ir semimartingalų teorijos. Tradiciškai tai priskiriama tikimybių teorijai.

2008 m. K. Pileckas buvo išrinktas VU Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos katedros vedėju ir perėjo dirbti į VU. Diferencialinių lygčių skyrius, vadovaujamas S. Rutkausko, dar dvejus metus formaliai egzistavo naujai pavadintame Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų (DMST) institute, o 2010 metais DLS buvo prijungtas prie SMS. Nuo 2012 metų VU DMST institute nebeliko nei diferencialinių lygčių, nei skaitinių metodų. Liko tik moksliniai rezultatai ir prisiminimai. Drįstu atsakingai pareikšti – geri prisiminimai.

8. Priedai

8.1. Lietuvos studentų, 1977 metais baigusių Sankt Peterburgo universitetą, disertacijos

1. Algirdas Ambrazevičius. Kapiliarumo uždaviniai kūgio formos srityse. Fizikos-matematikos mokslų kandidato disertacija. Vadovė prof. N. Uralceva, gynimo data 1981-12-14, SSRS MA Matematikos instituto Sankt Peterburgo skyrius.
2. Konstantinas Pileckas. Navjė-Stokso lygčių kraštiniai uždaviniai srityse su nekompaktinėmis sienomis. Fizikos-matematikos mokslų kandidato disertacija, Vadovas prof. V. Solonnikovas, gynimo data 1982-03-25, Sankt Peterburgo universitetas.
3. Aleksas Domarkas. Kvazitiesinių elipsinių ir parabolinių lygčių vienpusių sprendinių reguliarumas. Fizikos - matematikos mokslų kandidato disertacija, vadovė prof. N. Uralceva, gynimo data 1982-12-23. Minskas, Baltarusijos MA Matematikos institutas.
4. Eugenijus Paliokas. Dirichle uždavinys nestipriai elipsinių lygčių sistemoms. Fizikos-matematikos mokslų kandidato disertacija, vadovas prof. Algimantas Janušauskas, gynimo data 1985-06-21. Minskas, Baltarusijos universitetas.
5. Kazimieras Samaitis. Sunkaus klampaus nesuspaudžiamo kapiliaraus skysčio tekėjimo dvimatis uždavinys su laisvu paviršiumi ir nuliniu kraštiniu kampu. Fizikos-matematikos mokslų kandidato disertacija, vadovas prof. V. Solonnikovas, gynimo data 1991-05-16.
6. Gintautas Gudynas. Netiesinių pirmosios eilės sistemų nelokalinių teorija. Fizikos-matematikos mokslų kandidato disertacija, vadovas prof. Kružkovas. Gynimo data 1991-05-23, Minskas, Baltarusijos MA Matematikos institutas.
7. Konstantinas Pileckas. Stokso arba Navjė-Stokso lygčių su nekompaktiniu kraštu svorinė teorija, tolygūs įverčiai ir asimptotika. Habilituoto daktaro disertacija. Gynimo data 1995-01-10. Paderborno universitetas.

8.2. Mokslų kandidato (daktaro) disertacijos, apgintos vadovaujant prof. Algimantui Janušauskui

1. Stasys Rutkauskas. Nereguliariai išsigimstančių elipsinių lygčių sprendinių analizinė struktūra, 1978, Minskas, Baltarusijos universitetas.
2. Donatas Jurgaitis. Pirmos eilės išsigimstančių elipsinių sistemų analizinė teorija. 1984, Minskas, Baltarusijos universitetas.
3. Eugenijus Paliokas. Nestipriai elipsinių lygčių sistemų Dirichle uždavinys. 1985, Minskas, Baltarusijos universitetas.
4. Ojaras Purvinis. Elipsinių lygčių kraštiniai uždaviniai. 1988, Minskas, Baltarusijos universitetas.

5. Vida Stukaitė. Dirichle uždavinio ir modifikuoto Dirichle uždavinio elipsinėms lygtims spektro savybės. 1989, Minkas, Baltarusijos universitetas.
6. Daiva Korsakienė. Išsigimstančių elipsinių lygčių sprendinių išraiškos ir analiziškumo sritys. 1997, VU (vadovai A. Janušauskas ir F. Ivanauskas).
7. Gintaras Puriuskis. Sprendinių ypatybės mažesnės dimensijos srityse ir nestipriai elipsinės sistemos. 1997, VU (vadovai A. Janušauskas ir B. Kvedaras).

8.3. Mokslų kandidato (daktaro) disertacijos, apgintos vadovaujant doc. dr. Bronislavui Kvedarui

1. Jonas Kleiza. Diferencialinių lygčių analiziniai sprendiniai ir jų aproksimacija kompleksinėje erdvėje. 1975, Minkas, Baltarusijos MA Fizikos ir matematikos skyrius.
2. Dangutė Sapagovienė. Elipsinių diferencialinių operatorių tikrinių reikšmių uždavinio sprendimas skirtuminais metodais. 1976, Minkas, Baltarusijos MA Matematikos institutas.
3. Jonas Macionis. Dvitaškių kraštinių uždavinių išsprendžiamumo klausimas ir apibendrintoji Gryno funkcija. 1977, Irkutskas.
4. Ona Dulkytė. Hidrogeologinių parametrų skaičiavimo metodika naudojant ESM. 1986, (vadovai B. Kvedaras, N. Ogilvi), Sąjunginis vandens tiekimo, kanalizacijos, hidrotechninių įrenginių ir inžinerinės hidrogeologijos MTI.
5. Gintaras Puriuskis. Sprendinių ypatybės mažesnės dimensijos srityse ir nestipriai elipsinės sistemos. 1997, VU, (vadovai B. Kvedaras ir A. Janušauskas).

8.4. Mokslų kandidato (daktaro) disertacijos, apgintos vadovaujant prof. Konstantinui Pileckui

1. Teresė Leonavičienė. Suspaudžiamo skysčio tekėjimo matematiniai modeliai begalinėse srityse. 2002, MII.
2. Linas Zaleskis. Navjė-Stokso lygtys srityse su nekompaktišku kontūru. 2008, VU.
3. Vaidas Keblikas. Navjė-Stokso lygčių periodiniai laiko atžvilgiu sprendiniai srityse su cilindriniais išėjimais į begalybę. 2008, VU.
4. Kristina Kaulakytė. Stacionari Navjė-Stokso sistema su nehomogeninėmis kraštinėmis sąlygomis srityse su nekompaktiškais kraštais. 2013, VU.
5. Mindaugas Skujus. Laiko atžvilgiu periodinio Stokso uždavinio srityse su cilindriniais išėjimais asimptotinės sąlygos begalybėje, 2014, VU.
6. Alicija Eismontaitė. Stokso sistemų sprendiniai srityse su smailuma. 2019, VU.

8.5. Mokslų kandidato (daktaro) disertacijos, apgintos vadovaujant prof. Donatui Švitrai

1. Regimantas Laugalys. Kraujo forminių elementų dinamikos matematinis modeliavimas. 1990, SSRS MA Sibiro skyriaus Biofizikos institutas.
2. Eugenijus Jančys. Matematinis endokrininių procesų modeliavimas. 1990, SSRS MA Biofizikos-instituto Sibiro skyrius.
3. Rimantas Griekienis. Vabzdžių skaičiaus dinamikos matematinis modeliavimas. 1991, SSRS MA Sankt Peterburgo skyrius.
4. Petras Zemlys. Maksimalaus produktyvumo medynų formavimo matematinis modeliavimas. 1991, SSRS MA Sankt Peterburgo mokymo centas.
5. Kostas Bučys. Branduolinių reaktorių dinamikos matematinis modeliavimas. 2000, Klaipėdos universitetas.
6. Rasa Grigolienė. Žmogaus reprodukcinės sistemos matematinis modeliavimas. 2000, Klaipėdos universitetas.
7. Igor Basov. Glikemijos monitoringas. 2001, Klaipėdos universitetas.
8. Jolanta Janutėnienė. Metalų pjovimo procesų matematinis modeliavimas. 2001, Klaipėdos universitetas.

9. Literatūra

9.1. Lietuvos matematikos istorija (knygos)

1. J. Banionis. Matematikos mokslo raida Lietuvoje 1920–1940 m. Vilnius, 1994, 158 p.
2. J. Banionis. Matematinės minties raida Lietuvoje. Nuo matematikos žinijos atsiradimo iki matematikos mokslo įsitvirtinimo. Vilnius, LEU, 2014, 124 p.
3. J. Kubilius. Matematika Lietuvos aukštosiose mokyklose 1921–1940 metais. (Serija „Iš Lietuvos matematikos istorijos“, 4). Vilnius, VU, 2015, 184 p.
4. Lietuvos universiteto, Vytauto Didžiojo universiteto, Vilniaus universiteto Fizikos, matematikos, mechanikos informatikos ir statistikos absolventai 1922–2009. Sudarytojai: H. Jasiūnas, V. Stakėnas, V. Verikaitė. Vilnius, VU, 2010, 640 p.
5. Matematikos ir informatikos institutas. Rengėjai: M. Sapagovas, G. Dzemyda, S. Rutkauskas, A. Žandaris, D. Daugaravičienė, Vilnius, MII, 2006, 296 p.
6. Matematika Lietuvoje po 1945 metų (Serija „Iš Lietuvos matematikos istorijos“, 2). Vilnius, MII, 2006, 352 p.
7. Vilniaus universiteto istorija 1944–1979, Ats. redaktorius A. Bendžius, Vilnius, Mokslas, 1979, 440 p.

9.2. Lietuvos matematikos istorija (straipsniai)

1. A. Bikelis, E. Manstavičius. Matematika. Knygoje [7], 197–208, (1979).
2. F. Ivanauskas, M. Sapagovas. Skaičiavimo matematika. Knygoje [6], 284–296, (2006).
3. J. Kubilius. Kaip mokslų akademijoje atsirado matematika. Knygoje [6], 9–23, (2006).
4. B. Kvedaras. Diferencialinės lygtys. Knygoje [6], 137–155, (2006).
5. V. Paulauskas. Matematika Lietuvos universitete 1920–1940. Knygoje [4], 29–39, (2010).
6. H. Pragarauskas. Atsitiktiniai procesai ir laukai. Knygoje [6], 220–242, (2006).
7. S. Rutkauskas. Matematikos ir informatikos instituto penkiasdešimt metų istorijos bruožai. Knygoje [5], 12–39, (2006).

9.3. Monografijos, vadovėliai, konferencijų darbai

1. H. Amann, G.P. Galdi, K. Pileckas and V. A. Solonnikov. Navier– Stokes Equations and Related Nonlinear Problems. Proceedings of the Sixth International Conference NSEC, Palanga, Lithuania, May 22–29, 1997. Vilnius, 438 p.
2. A. Ambrazevičius. Matematinės fizikos lygtys, 1 dalis, Vilnius, 1996, 310 p.
3. A. Ambrazevičius, A. Domarkas. Matematinės fizikos lygtys, 2 dalis, Vilnius, Aldorėja, 1999, 312 p.
4. R. Baronas, F. Ivanauskas, J. Kulys. Mathematical Modelling of biosensors: An Introduction for Chemists and Mathematicians. Springer Business Media, 2012, 544 p.
5. V. Būda, S. Rutkauskas. Pagrindiniai matematinės fizikos uždaviniai ir sprendimo metodai. Vilnius, Technika, 1992, 54 p.
6. R. Čiegis. Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai. Vilnius, 2003, 440 p.
7. R. Čiegis, A. Samarskii and M. Sapagovas. Finite difference Schemes. Proceedings of the Conference FDS 2000, September 1–4, 2000, Palanga, MII, Vilnius, Mokslo aidai.
8. P. Golokvosčius. Pirmosios ir antrosios eilės diferencialinės lygtys. VU leidykla, Vilnius, 1987, 157 p.
9. P. Golokvosčius. Antrosios eilės tiesinės homogeninės diferencialinės lygtys su pastoviais realiais koeficientais. Sprendinių kokybinės savybės. Vilnius, VU leidykla, 1989, 104 p.
10. P. Golokvosčius. Normaliosios diferencialinių lygčių sistemos. Vilnius, VU leidykla, 1996, 136 p.
11. P. Golokvosčius. Tiesinės ir kvazitiesinės pirmosios eilės dalinių išvestinių diferencialinės lygtys. Vilnius, VU leidykla, 1996, 164 p.
12. P. Golokvosčius. Diferencialinės lygtys, Vilnius, TEV, 2000, 512 p.
13. B. Kvedaras. Matricų teorija. Kaunas, VDU, 1999, 362 p.
14. B. Kvedaras. Matricų teorija. 2 dalis, 2000, Vilnius, Mokslo aidai, 390 p.
15. B. Kvedaras. Gimtieji Šalinėnai. Vilnius, LNRS, 2009, 280 p.
16. B. Kvedaras, M. Sapagovas. Skaičiavimo metodai. Vilnius, Mintis, 1974, 516 p.

17. R. Mokrik. Žemės gelmių vandens keliais. Vilnius, VU leidykla, 2013, 192 p.
18. V. Paulauskas, P. Golokvosčius. Diferencialinės lygtys. Valstybinė mokslinės ir politinės literatūros leidykla. Vilnius, 1961, 388 p.
19. K. Pileckas. Navier–Stokes System in Domains with cylindrical outlet in infinity. Leray’s Problem. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, 4. Ch. 8, Elsevier, 2007, 445–647 p.
20. K. Pileckas. Navjė–Stokso lygčių matematinė teorija, Vilnius, 2007, 230 p.
21. Th. Rasiyas, K. M. Srivastava, A. Yanushauskas, Ed. Topics in Polynomials of One and Several Variables and their Applications, Word Scientific, Singapore, 1983, 618 p.
22. S. Rutkauskas. Įvadas į diferencialinių lygčių kursą. Vilnius, VPU, 2006, 238 p.
23. S. Rutkauskas. Paprastųjų diferencialinių lygčių asimptotiniai metodai. Vilnius, Mokslo aidai, 2007.
24. A. A. Samarskii, M. P. Sapagovas. (ed.) Mathematical Modelling and Applied Mathematics. North-Holland, 1992, 470 p.
25. M. Sapagovas. Diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis, Vilnius, Mokslo Aidai, 2007, 270 p.
26. L. Stupelis. Navier–Stokes Equation in irregular domain. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 1995, 574 p.

9.4. Monografijos, vadovėliai, konferencijų darbai, straipsniai (rusų kalba)

1. A. Janušauskas. Potencialo teorijos pasvirusios išvestinės uždavinys. Novosibirskas, Nauka, 1985, 262 p.
2. A. Janušauskas. Potencialo metodai elipsinių lygčių teorijoje. Vilnius, Mokslas, 1990, 294 p.
3. A. Janušauskas. Daugiamatės elipsinės sistemos su kintamais koeficientais. Vilnius, 1999, 264 p.
4. A. Janušauskas. Kelių kintamųjų analizinės ir harmoninės funkcijos. Novosibirsk, Nauka, 184 p.
5. J. S. Kolesov, D. Švitra. Autosvyravimai sistemose su vėlavimu. 1977.
6. J. Kubilius. Tikimybiniai metodai skaičių teorijoje. Vilnius, Valstybinė mokslinės ir politinės literatūros leidykla, 1959.
7. V. G. Mazja, B. A. Plamenevskij, L. I. Stupelis. Trimatis uždavinys apie nusistovėjusį skysčio tekėjimą su laisvu paviršiumi. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 23 leidinys. Vilnius, MKI, 1979, 155 p.
8. Š. I. Strelis. Apie antrosios eilės diferencialinių lygčių sprendinių augimą. Mat. Sbor. (4), 286–288 (1958).
9. Š. I. Strelis. Diferencialinių lygčių analitinių sprendinių savybės. Vilnius Mintis, 1972, 468 p.
10. L. Stupelis. Kraštiniai uždaviniai Navjė–Stokso Lygtims. Vilnius, Mokslas, 1992, 406 p.
11. D. Švitra. Fiziologinių sistemų dinamika. Vilnius, MKI Mokslas, 1989, 169 p.