VILNIAUS UNIVERSITETAS

Julius Andrikonis

Efektyvus metodas baigtinei išvedimo paieškai tranzityviose multimodalinėse logikose gauti

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, Matematika (01 P)

Vilnius, 2011

Disertacija rengta 2006–2011 metais Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas:

doc. habil. dr. Regimantas Pliuškevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika — 01 P).

Disertacija ginama Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

prof. habil. dr. Gintautas Dzemyda (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika — 09 P)

Nariai:

prof. habil. dr. Juozas Augutis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika — 01 P)

prof. dr. Albertas Čaplinskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika — 09 P)

prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika — 01 P)

prof. habil. dr. Feliksas Ivanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika — 01 P)

Oponentai:

prof. habil. dr. Henrikas Pranevičius (Kauno Technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika — 09 P)

doc. dr. Jūratė Sakalauskaitė (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika — 01 P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2011 m. gruodžio 22 d. 13 val., Matematikos ir informatikos instituto 203 auditorijoje.

Adresas: Akademijos g. 4, LT-08663, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011 m. lapkričio 22 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus Universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Julius Andrikonis

Effective Method to Obtain Terminating Proof-Search in Transitive Multimodal Logics

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2011

The dissertation was prepared in 2006–2011 at Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Lithuania.

Research supervisor:

Assoc. Prof. Habil. Dr. Regimantas Pliuškevičius (Vilnius University, physical sciences, mathematics — 01 P).

The thesis is defended at the council of Mathematics:

Chairman:

Prof. Habil. Dr. Gintautas Dzemyda (Vilnius University, physical sciences, informatics — 09 P)

Members:

Prof. Habil. Dr. Juozas Augutis (Vytautas Magnus University, physical sciences, mathematics — 01 P)

Prof. Dr. Albertas Čaplinskas (Vilnius University, physical sciences, informatics — 09 P)

Prof. Habil. Dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, physical sciences, mathematics — 01 P)

Prof. Habil. Dr. Feliksas Ivanauskas (Vilnius University, physical sciences, mathematics — 01 P)

Opponents:

Prof. Habil. Dr. Henrikas Pranevičius (Kaunas University of Technology, physical sciences, informatics — 09 P)

Assoc. Prof. Dr. Jūratė Sakalauskaitė (Vilnius University, physical sciences, mathematics — 01 P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council of Mathematics on 22nd of December, 2011, in room 203 of Institute of Mathematics and Informatics at 1 pm.

Address: Akademijos g. 4, LT-08663, Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on 22nd of November, 2011.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

Padėkos

Dedikacija:

> Skiriu šį darbą savo tėčiui Juozapui Andrikoniui, kuris norėjo pabaigti doktorantūrą, tačiau vietoj studijų pasirinko skirti daugiau laiko man, mano sesei ir broliui auginti.

Nuoširdžiai dėkoju visiems žmonėms, padėjusiems man šiame darbe. Esu nepaprastai dėkingas savo daktaro darbo vadovui doc. habil. dr. Regimantui Pliuškevičiui už suteiktas žinias ir nuolatinį dalinimąsi savo patirtimi. Dėkoju Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto Programų sistemų inžinerijos skyriaus Matematinės logikos sektoriaus mokslininkams ir savo kolegoms iš Vilniaus Universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto už vertingas diskusijas ir darbo tobulinimo pasiūlymus. Ypatingai norėčiau padėkoti disertacijos recenzentui dr. Romui Alonderiui už detalius atsiliepimus ir konsultacijas. Esu dėkingas doc. dr. Stanislovui Norgėlai už konstruktyvias pastabas ir dr. Adomui Birštunui už pasidalinimą daktaro darbo gynimo patirtimi.

Nuolankiai dėkoju savo šeimai, be kurios šis darbas būtų buvęs neįmanomas. Ypač dėkoju savo tėvams Juozapui Andrikoniui ir Virginijai Andrikonienei už didžiulę moralinę ir finansinę paramą. Esu be galo dėkingas savo žmonai Viktorijai ir dukrai Ievai už supratingumą ir kantrybę, dėl kurių galėjau skirti laiko disertacijai.

Tyrimų sritis ir temos aktualumas

Įvairios modalumo logikos plačiai naudojamos informatikos ir dirbtinio intelekto uždaviniams spręsti. Viena iš tokių taikymo sričių yra epistemologija — mokslas apie žinias ir tikėjimą. Nors žinių modeliavimui dažniausiai naudojama modalumo logika *S5*, kai kuriose situacijose vietoj jos pasirenkamos kitos modalumo logikos, pavyzdžiui, *S4*. Yra sukurta daug sistemų be pjūvio logikai *S5*, tačiau visos jos savaip pakeičia tipinį Gentzeno tipo skaičiavimą. Pavyzdžiui, vienuose metoduose naudojami formulių indeksai, kituose vietoje sekvencijų naudojami kitokie reiškiniai. Šios problemos nereikia spręsti logikoje *S4*, kuriai yra sukurtas paprastas sekvencinis skaičiavimas be pjūvio. Be to, yra žinoma, kad modalumo logika *S5* gali būti trivialiai suvesta į *S4*, o įvykdomumo problema logikoje $S4_n$ yra PSPACE-complete klasės. Pagrindinė šiame daktaro darbe nagrinėjama logika yra *S4*, o gautieji rezultatai taip pat yra taikomi kitose episteminėse logikose K, *K4* ir T.

Kaip bebūtų, monomodalumo logikos *S4* neužtenka, kad būtų galima modeliuoti daugelio agentų žinias, todėl naudojamos multimodalumo logikos. Tačiau visavertei diskusijai apie daugiaagentes sistemas jų neužtenka, nes jos neaprašo skirtingų agentų žinių sąveikos. Siekiant modeliuoti sąveiką tarp agentų, logika $S4_n$ gali būti papildyta įvairiomis sąveikos aksiomomis. Pavyzdžiui, [14] aprašo galimus agentų žinių sąryšius dviagentėse sistemose. Straipsnyje [13], analizuojama viena daugiaagentė sistema ir pasiūloma jai pritaikyta aksioma. Keletas sąveikos aksiomų pateikiama [7]. Be to, [13, 14] aprašo keletą daugiaagenčių sistemų agentų žinių sąveikos scenarijų:

1. Sistema su centriniu apdorojimo įrenginiu. Sistemoje yra vienas agentas (vadinamas centriniu, žymimas c), kuris žino viską, kas yra žinoma kitiems agentams. Šiam scenarijui modeliuoti, į modalumo logiką įtraukiama aksioma $\Box_a F \supset \Box_c F$[1]. Šioje disertacijoje ji vadinama centrinio agento aksioma.

2. Sistema su skirtingos galios agentais. Agentai surūšiuojami pagal jų skaičiavimo pajėgumus ir kiekvienas didesnio pajėgumo agentas žino viską, ką žino ne toks pajėgus agentas. Šioje situacijoje modalumo logika gali būti papildyta panašia aksioma $\Box_i F \supset \Box_j F$[2], kur i yra mažesnio pajėgumo agentas, negu j.

Šioje disertacijoje nagrinėjamas pirmasis atvejis. Pagrindinės to priežastys yra dvi. Visų pirma, rezultatai pristatyti šiame darbe gali būti pritaikyti ir antrajam sąveikos atvejui. Antra, kaip parodyta disertacijoje, centrinio agento modalumas modeliuoja paskirstyto žinojimo operatoriaus elgseną. Paskirstyto žinojimo sąvoka pirmą kartą buvo panaudota straipsnyje [8] ir yra plačiai nagrinėjama.

Tyrimo tikslai

Įvairiose logikose teiginiams išvesti naudojami skirtingi metodai ir išvedimo paieškai palengvinti yra kuriamos ir naudojamos kompiuterinės programos. Tačiau, kad metodą galima būtų perkelti į kompiuterinę programą, jis turi būti algoritmiškas. Kitaip sakant, jis turi pasižymėti dviem savybėmis. Pirmiausia, kiekviename žingsnyje turi būti numatytas vienintelis veiksmas,

[1] Jei agentas a žino F, tai centrinis agentas taip pat žino F.
[2] Jei agentas i žino F, tai agentas j taip pat žino F.

kurį reikia atlikti. Ir antra, išvedimo paieška turi būti baigtinė abiem atvejais: jei išvedimas sėkmingas ir jei ne. Šio tyrimo pagrindinis tikslas — sukurti tokį metodą nagrinėjamai multimodalumo logikai $S4_n$ su centrinio agento aksioma.

Darbo tikslas ir užduotys

Aprašant modalumo logiką paprastai yra naudojami Hilberto tipo skaičiavimai, kuriuose reikiamos logikos savybės formuluojamos kaip skaičiavimo aksiomos ir kelios išvedimo taisyklės. Nors tokį apibrėžimo būdą labai patogu naudoti semantiniuose samprotavimuose, tačiau išvedimo paieška naudojant šį metodą kelia daug problemų. Todėl šioje disertacijoje naudojami Gentzeno tipo skaičiavimai (dar vadinami sekvenciniais skaičiavimais) ir pirmoji užduotis — sukonstruoti pilnus ir korektiškus sekvencinius skaičiavimus nagrinėjamoms logikoms. Kitas žingsnis — pakeisti sukonstruotus skaičiavimus taip, kad jie būtų algoritmiški. Siekiant įvykdyti šią užduotį, turi būti pašalintos visos nealgoritminės taisyklės (tokios, kaip pjūvis) ir užtikrintas išvedimo paieškos sekvenciniuose skaičiavimuose baigtinumas. Nors pagrindinis disertacijos tikslas yra toks skaičiavimas multimodalumo logikai $S4_n$ su centrinio agento aksioma, tačiau tyrimo metu gauti panašūs rezultatai kitoms episteminėms logikoms, tokioms kaip K_n, T_n ir $K4_n$ su centrinio agento aksioma, todėl jie taip pat yra pristatomi šiame darbe.

Tiksliau, tyrimo metu buvo įvykdytos tokios užduotys:

1. Sukurti pradiniai sekvenciniai skaičiavimai multimodalumo logikoms K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma.

2. Sukurtiesiems skaičiavimams buvo įrodyta pjūvio eliminavimo teorema.

3. Įrodytas sukurtųjų bepjūvių skaičiavimų baigtinumas logikoms K_n ir T_n su centrinio agento aksioma. Tuo tikslu logikos T_n skaičiavimas buvo nežymiai modifikuotas.

4. Sukurtas naujas išvedimo paieškos baigtinumo užtikrinimo metodas tranzityvioms monomodalumo logikoms $K4$ ir $S4$. Gauti nauji baigtinės išvedimo paieškos sekvenciniai skaičiavimai šioms logikoms.

5. Sukurtasis metodas pritaikytas tranzityvioms multimodalumo logikoms $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma. Tokiu būdu gauti nauji baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimai šioms logikoms.

Metodai

Pradiniai Gentzeno tipo skaičiavimai logikoms K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma yra išvesti iš atitinkamų pilnų ir korektiškų Hilberto tipo skaičiavimų. Skaičiavimų pilnumas ir korektiškumas įrodytas, parodant Gentzeno tipo ir Hilberto tipo skaičiavimų ekvivalentumą. Daugumos skaičiavimo taisyklių apverčiamumas ir silpninimo bei kartojimo struktūrinių taisyklių leistinumas panaudotas pjūvio eliminavimo teoremos įrodyme. Išvedimo paieškos baigtinumas sukurtajame skaičiavime multimodalumo logikai K_n su centrinio agento aksioma įrodomas parodant sekvencijos ilgio mažėjimą einant išvedimo paieškos medžiu aukštyn.

Siekiant gauti baigtinę išvedimų paiešką skaičiavimuose kitoms nagrinėjamoms logikoms buvo sukurti nauji metodai panaudojant žymes ir indeksus. Idėja naudoti žymes ir indeksus sekvenciniuose skaičiavimuose buvo naudota dar [10]. Šiame darbe siekiant apriboti refleksyvumo taisyklių taikymus, naudojama žymė $*$. To pakanka logikai T_n su centrinio agento aksioma. Kita vertus, tranzityvumo aksioma $\Box_l F \supset \Box_l \Box_l F$ sukelia daugiau problemų ieškant, kurioje vietoje pabaigti išvedimo paiešką logikose $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma. Todėl be žymės $*$ naudojami indeksai, kurie leidžia sekti kiekvieną modalumo įeitį, kuri gali tapti ciklo priežastimi. Be to indeksuotų modalumo įeičių žymės rodo, kada tranzityvumo taisyklė buvo taikyta tai pačiai formulei paskutinį kartą. Galiausiai, naudojami formulių numeriai, kurie žymi, kada formulė pirmą kartą atsirado išvedime. Indeksai, žymės ir formulių numeriai naudojami siekiant apriboti tranzityvumo taisyklės taikymą.

Siekiant pademonstruoti, kad sukurtieji baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimai yra pilni ir korektiški, įrodomas ekvivalentumas tarp bepjūvio ir baigtinės išvedimo paieškos sekvencinio skaičiavimo. Tai, kad išvedimo paieška skaičiavimuose visada yra baigtinė, įrodoma pademonstruojant, kad kylant išvedimo medžiu mažėja sutvarkyto rinkinio reikšmė.

Mokslinis naujumas

Šioje disertacijoje pristatomi nauji sekvenciniai skaičiavimai multimodalumo logikoms K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma ir monomodalumo logikoms $K4$ ir $S4$. Logikai $S4$ yra sukurta daug skaičiavimų, kuriuose išvedimo paieška yra baigtinė. Pavyzdžiui, [9] pasiūlytas naujas istorijų metodas, šiuo metu ypač plačiai naudojamas įvairiose episteminėse logikose. Tačiau kaip nurodyta straipsnyje, nėra aišku, kaip šį metodą pritaikyti multimodalumo logikai $S4_n$. Be to, autoriui nėra žinomas baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimas multimodalumo logikai $S4_n$ su centrinio agento aksioma. Nors įvairūs skaičiavimai multimodalumo logikoms su sąveikos aksiomomis yra nagrinėjami, tačiau baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimas logikai $S4_n$ su centrinio agento aksioma niekur nėra pateiktas. Pavyzdžiui, yra sukurti baigtiniai skaičiavimai logikai $KD45_n$ su įvairiomis sąveikos aksiomomis. Taip pat yra pateikti bepjūviai sekvenciniai skaičiavimai multimodalumo logikoms K_n, T_n ir $S4_n$ su paskirstyto žinojimo operatoriumi, kuris, kaip jau minėta, yra analogiškas centrinio agento žinojimo operatoriui. Pagal šiuos skaičiavimus nesunkiai galima sukonstruoti bepjūvį skaičiavimą logikai $K4_n$ su centrinio agento aksioma. Tačiau, minėtuose skaičiavimuose logikoms $K4_n$ ir $S4_n$ išvedimo paieška ne visada yra baigtinė.

Svarbiausias disertacijos rezultatas yra sukurtas naujas žymių ir indeksų metodas tranzityvioms monomodalumo ir multimodalumo logikoms, kuriame naudojami (1) modalumo įeičių indeksai, (2) indeksuotų modalumo įeičių žymės, (3) žymės $*$ ir (4) formulių numeriai. Nors žymių ir indeksų panaudojimas nėra nauja idėja, tačiau šiame darbe jos naudojamos nauju ir originaliu būdu. Šis naujas metodas leidžia užtikrinti, kad išvedimo paieška visada yra baigtinė. Disertacijoje naujasis metodas yra pritaikytas baigtinės išvedimo paieškos sekvenciniuose skaičiavimuose tranzityvioms monomodalumo logikoms $K4$ ir $S4$, o taip pat tranzityvioms multimodalumo logikoms $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma.

Galiausiai, šiame darbe pristatyti rezultatai gali būti pritaikyti ir kitoms multimodalumo logikoms. Pirmiausia, pašalinus centrinį agentą, gaunami baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimus multimodalumo logikoms K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$. Be to, naujasis išvedimo baigtinumo užtikrinimo metodas gali būti naudojamas kuriant Gentzeno tipo skaičiavimus minėtoms monomodalumo logikoms su kitokiomis sąveikos aksiomomis. Pvz., jį galima būtų pritaikyti sistemai su skirtingos galios agentais, aprašytai disertacijos pradžioje.

Ginamieji teiginiai

Gynimui pateikiami šie teiginiai:

1. Sukurtieji Gentzeno tipo skaičiavimai multimodalumo logikoms K_n, T_n,

$K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma demonstruoja kaip centrinio agento aksiomą įterpti į sekvencinius skaičiavimus nesukeliant problemų pjūvio eliminavime.

2. Sukurtas naujas metodas baigtinei išvedimo paieškai gauti. Pritaikius šį metodą sukurti nauji baigtinės išvedimo paieškos Gentzeno tipo skaičiavimai tranzityvioms monomodalumo logikoms $K4$ ir $S4$.

3. Šis naujasis metodas yra praplėstas ir panaudotas sukurti naujus baigtinės išvedimo paieškos Gentzeno tipo skaičiavimus tranzityvioms multimodalumo logikoms $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma. Dalis šio metodo idėjų yra panaudota sukurti tokį skaičiavimą logikai T_n su centrinio agento aksioma.

Rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai pateikti 6 moksliniuose straipsniuose. 2 straipsniai ([2, 4]) yra leidiniuose, įtrauktuose į Scientific Master Journal (ISI) sąrašą. Kiti straipsniai ([1, 3, 5, 6]) yra tarptautiniuose recenzuojamuose leidiniuose.

Tarpiniai rezultatai taip pat yra pristatyti 4 mokslinėse konferencijose ir Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto Programų sistemų inžinerijos skyriaus Matematinės logikos sektoriaus organizuojamuose seminaruose.

Disertacijos struktūra

Pirmajame skyriuje pateikiami pradiniai Hilberto tipo ir Gentzeno tipo skaičiavimai klasikinei, monomodalumo ir multimodalumo logikoms, apibrėžiami keli svarbūs matai, o taip pat įrodoma keletas minėtų skaičiavimų savybių. Vienos iš svarbiausių savybių — tai daugumos sekvencinių skaičiavimų taisyklių apverčiamumas ir silpninimo bei kartojimo struktūrinių taisyklių leistinumas pateiktuose sekvenciniuose skaičiavimuose.

Antrajame skyriuje pristatoma centrinio agento aksioma ir parodomas centrinio agento žinių ryšys su paskirstytomis žiniomis. Toliau pateikiami Hilberto tipo skaičiavimai multimodalumo logikoms K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma. Iš pateiktųjų skaičiavimų išvedami Gentzeno tipo skaičiavimai ir įrodomas jų ekvivalentumas. Paskutiniame šio skyriaus poskyryje visiems nagrinėjamiems sekvenciniams skaičiavimams įrodoma pjūvio eliminavimo teorema.

Trečiajame skyriuje pateikiami baigtinės išvedimo paieškos sekvenciniai skaičiavimai visoms nagrinėjamoms logikoms ir įrodoma, kad išvedimo paieška juose yra baigtinė. Iš tiesų, išvedimai bepjūviame skaičiavime logikai K_n su centrinio agento aksioma jau yra baigtiniai, o bepjūviame skaičiavime logikai T_n reikia tik nedidelių pakeitimų. Kad disertacija būtų aiškesnė, prieš nagrinėjant multimodalumo logikas $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma, pristatomi baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimai monomodalumo logikoms $K4$ ir $S4$. Šitame skyriuje taip pat įrodomas visų naujųjų skaičiavimų pilnumas ir korektiškumas.

Disertacijos priede pateikiamas lemos apie kelių formulių išvedamumą Hilberto tipo skaičiavimuose įrodymas.

Pradiniai skaičiavimai

Šiame skyriuje pristatomi apibrėžimai ir lemos, kuriais bus remiamasi visoje disertacijoje. Šiame skyriuje pristatyti rezultatai nėra gauti autoriaus.

Klasikinės teiginių logikos (PC) formulė apibrėžiama tradiciniu rekursyviu būdu naudojant operatorius $\neg$ (neigimas), $\wedge$ (konjunkcija), $\vee$ (disjunkcija) ir $\supset$ (implikacija). Disertacijoje formulės žymimos didžiosiomis lotyniškos abėcėlės raidėmis ($F, G, H, F_1, \dots$), propoziciniai kintamieji žymimi mažosiomis lotyniškos abėcėlės raidėmis ($p, q, r, p_1, \dots$).

Formulės F tapatus teisingumas klasikinėje logikoje apibrėžiamas tradiciškai naudojant interpretacijos funkciją, kuri priskiria formulės F propoziciniams kintamiesiems reikšmę $\top$ (teisinga) arba $\bot$ (neteisinga). Jei su bet kuria interpretacija formulė teisinga, laikoma, kad ji tapačiai teisinga ir žymima $\models_{PC} F$.

Tikrinti formulės tapačiam teisingumui yra naudojami įvairūs metodai. Šiame darbe nagrinėjami Hilberto ir Gentzeno tipo skaičiavimai.

Hilberto tipo skaičiavimas logikai PC (žymimas HPC) apibrėžiamas taip, kaip [11]. Jeigu įmanoma sukonstruoti formulės F išvedimą skaičiavime HPC, sakoma, kad formulė F yra išvedama ir žymima $\vdash_{HPC} F$.

Sakoma, kad skaičiavimas $\mathcal{C}$ logikai $\mathcal{L}$ yra korektiškas, jei bet kuriai formulei F teisinga, kad jei $\vdash_{\mathcal{C}} F$, tai $\models_{\mathcal{L}} F$. Sakoma, kad skaičiavimas $\mathcal{C}$ logikai $\mathcal{L}$ yra pilnas, jei bet kuriai formulei F teisinga, kad jei $\models_{\mathcal{L}} F$, tai $\vdash_{\mathcal{C}} F$. Skaičiavimo HPC pilnumas ir korektiškumas parodytas [11].

Hilberto tipo skaičiavimai yra patogūs semantinėje diskusijoje, tačiau sukonstruoti formules išvedimo medį paprasčiau yra Gentzeno tipo skaičiavimuose. Šie skaičiavimai naudoja sekvencijas: reiškinį $\Gamma \to \Delta$, kur Γ ir Δ

yra formulių multiaibės, Γ vadinama antecedentu, o Δ sukcedentu. Todėl Gentzeno tipo skaičiavimai dar vadinami sekvenciniais skaičiavimais. Šiame darbe sekvencijos bus žymimos raide S (su indeksu ar be jo), o multiaibės — didžiosiomis graikiškos abėcėlės raidėmis (Γ, Δ, Σ, Γ_1).

Sekvencijai $S = \Gamma \to \Delta$ atitinkanti formulė $\mathrm{Cor}(S)$ yra lygi $F \supset G$, kur F yra visų Γ formulių konjunkcija, o G — visų Δ formulių disjunkcija. Jei $\Gamma = \varnothing$, tai $\mathrm{Cor}(S) = G$, jei $\Delta = \varnothing$, tai $\mathrm{Cor}(S) = \neg F$. Sakoma, kad sekvencija S yra tapačiai teisinga (rašoma $\vDash_{PC} S$), jei $\vDash_{PC} \mathrm{Cor}(S)$.

Šioje disertacijoje naudojamas sekvencinis skaičiavimas logikai PC (žymimas GPC), kuris yra pateiktas [10]. Šio skaičiavimo taisyklės vadinamos loginėmis.

Sekvenciniame skaičiavime siekiant išvesti sekvenciją yra bandoma sukonstruoti išvedimo medį. Sekvencijos S išvedimo paieškos medis — tai medis, kurio mazguose yra sekvencijos, šaknis (esanti apačioje) yra S, ir jei mazgas, kuriame yra sekvencija S_1 turi vaikų, tai S_1 yra kurios nors skaičiavimo taisyklės taikymo išvada, o visuose mazgo vaikuose yra visos šio taikymo prielaidos. Jeigu visi sekvencijos S išvedimo paieškos medžio lapai yra skaičiavimo aksiomos, tai šis medis vadinamas sekvencijos S išvedimo medžiu. Jeigu sekvenciniame skaičiavime $\mathcal{C}$ egzistuoja sekvencijos S išvedimo medis, sakoma, kad sekvencija S yra išvedama skaičiavime $\mathcal{C}$ ir rašoma $\vdash_{\mathcal{C}} S$.

Paprastai sekvenciniame skaičiavime sekvencijos S išvedimo medžio paieška pradedama nuo sekvencijos S ir taikant skaičiavimo taisykles siekiama gauti aksiomas, taigi šioje disertacijoje sakoma, kad sekvencinio skaičiavimo taisyklė yra taikoma išvadai ir gaunamos jos prielaidos.

Sakoma, kad sekvencinis skaičiavimas $\mathcal{C}$ logikai $\mathcal{L}$ yra korektiškas, jei bet kuriai sekvencijai S teisinga, kad jei $\vdash_{\mathcal{C}} S$, tai $\vDash_{\mathcal{L}} S$. Sakoma, kad sekvencinis skaičiavimas $\mathcal{C}$ logikai $\mathcal{L}$ yra pilnas, jei bet kuriai sekvencijai S teisinga, kad jei $\vDash_{\mathcal{L}} S$, tai $\vdash_{\mathcal{C}} S$. Skaičiavimo GPC pilnumas ir korektiškumas parodytas [10].

Modalumo logika papildo klasikinės teiginių logikos PC formulės apibrėžimą būtinumo modalumu $\Box$. Galimumo modalumas $\Diamond$ išreiškiamas per $\Box$: išraišką $\Diamond F$ turi tą pačią prasmę kaip ir $\neg\Box\neg F$. Norint apibrėžti modalinių formulių teisingumą yra naudojama Kripke struktūra: trejetas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \Phi \rangle$, kuriame $\mathcal{W}$ yra pasaulių aibė, $\mathcal{R}$ yra dvinaris sąryšis tarp pasaulių, o Φ yra interpretacijos funkcija, priskirianti kiekvienam formulės propoziciniam kintamajam reikšmę $\top$ arba $\bot$ kiekviename pasaulyje. Kripke struktūros dvejetas $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ vadinamas freimu.

Hilberto tipo skaičiavimas silpniausiai modalumo logikai K (žymimas HK) gaunamas prie HPC aksiomų prijungus aksiomą *(K)*: $\Box(F \supset G) \supset (\Box F \supset \Box G)$ ir taisyklę NG: $\dfrac{F}{\Box F}$. Skaičiavimai logikoms T, $K4$ ir $S4$ (atitinkamai HT, $HK4$ ir $HS4$) gaunami skaičiavimą HK papildžius viena arba abiem iš aksiomų *(T)*: $\Box F \supset F$ (refleksyvumas) ir *(4)*: $\Box F \supset \Box\Box F$ (tranzityvumas). $HT = HK + (T)$, $HK4 = HK + (4)$, $HS4 = HT + (4) = HK4 + (T)$.

Apibrėžiant formulės tapatų teisingumą modalumo logikose atsižvelgiama į papildomus reikalavimus, kuriuos kelia aksiomos Kripke struktūros freimams. $\models_K F$, jei F teisinga kiekviename bet kurios Kripke struktūros pasaulyje. $\models_T F$, jei F teisinga kiekviename bet kurios Kripke struktūros su refleksyviu freimu pasaulyje. $\models_{K4} F$, jei F teisinga kiekviename bet kurios Kripke struktūros su tranzityviu freimu pasaulyje. $\models_{S4} F$, jei F teisinga kiekviename bet kurios Kripke struktūros su refleksyviu ir tranzityviu freimu pasaulyje.

Sekvenciniai skaičiavimai logikoms K, T, $K4$ ir $S4$ (atitinkamai GK, GT, $GK4$ ir $GS4$) yra gaunami skaičiavimą HPC papildžius modalinėmis taisyklėmis:

logikos K atveju taisykle:

$$\frac{\Gamma_2 \to F}{\Gamma_1, \Box\Gamma_2 \to \Delta, \Box F}\ (\to \Box)$$

logikos $K4$ atveju taisykle:

$$\frac{\Gamma_2, \Box\Gamma_2 \to F}{\Gamma_1, \Box\Gamma_2 \to \Delta, \Box F}\ (\to \Box)$$

logikos T atveju taisyklėmis:

$$\frac{F, \Box F, \Gamma \to \Delta}{\Box F, \Gamma \to \Delta}\ (\Box \to) \qquad \frac{\Gamma_2 \to F}{\Gamma_1, \Box\Gamma_2 \to \Delta, \Box F}\ (\to \Box)$$

logikos $S4$ atveju taisyklėmis:

$$\frac{F, \Box F, \Gamma \to \Delta}{\Box F, \Gamma \to \Delta}\ (\Box \to) \qquad \frac{\Box\Gamma_2 \to F}{\Gamma_1, \Box\Gamma_2 \to \Delta, \Box F}\ (\to \Box)$$

Skaičiavimuose GT ir $GS4$ taisyklė $(\Box \to)$ vadinama refleksyvumo taisykle, o skaičiavimuose $GK4$ ir $GS4$ taisyklė $(\to \Box)$ vadinama tranzityvumo taisykle.

Analizuojant daugelio agentų žinias, naudojama multimodalumo logika. Tokiu atveju agento l žinias žymi operatorius $\Box_l$ ir klasikinės logikos formulės apibrėžimas papildomas šiuo operatoriumi. Tokiu atveju kinta ir Kripke struktūros apibrėžimas: jei agentų yra n, tai Kripke struktūra yra rinkinys $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_{l_1}, \ldots, \mathcal{R}_{l_n}, \Phi \rangle$, kur $\mathcal{W}$ yra pasaulių aibė, $\mathcal{R}_{l_i}$ yra i-ojo agento dvinaris sąryšis tarp pasaulių, o Φ yra interpretacijos funkcija, priskirianti kiekvienam formulės propoziciniam kintamajam reikšmę $\top$ arba $\perp$ kiekviename pasaulyje.

Formulių tapatus teisingumas multimodalumo logikose K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$ apibrėžiamas analogiškai kaip ir monomodalumo logikose. Hilberto tipo skaičiavimai multimodalumo logikoms K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$ (žymimi HK_n, HT_n, $HK4_n$ ir $HS4_n$) gaunami monomodaliniuose skaičiavimuose HK, HT, $HK4$ ir $HS4$ monomodalinį būtinumo operatorių $\Box$ pakeitus multimodaliniu $\Box_l$. Analogiškai iš monomodalinių skaičiavimų GK, GT, $GK4$ ir $GS4$ gaunami multimodaliniai sekvenciniai skaičiavimai GK_n, GT_n, $GK4_n$ ir $GS4_n$. Norint pabrėžti, kad refleksyvumo (tranzityvumo) taisyklė taikoma būtent operatoriui $\Box_l$, ši taisyklė vadinama l-refleksyvumo (atitinkamai l-tranzityvumo).

Išvedimo paieškos medžio aukštis apibrėžiamas tradiciškai rekursiškai. Formulės ilgis yra loginių operatorių skaičius joje. Sekvencijos ilgis yra lygus visų sekvencijos formulių ilgių sumai. Tradiciškai apibrėžiamos teigiamos ir neigiamos formulių, poformulių ir operatorių įeitys sekvencijoje. Šis apibrėžimas ir sekvencinio skaičiavimo taisyklių forma užtikrina, kad teigiama (neigiama) poformulio įeitis savarankiška formule gali būti tik sukcedente (atitinkamai antecedente).

Taisyklės leistinumas skaičiavime reiškia, kad bet kuri formulė yra išvedama skaičiavime su leistina taisykle tada ir tik tada kai ji yra išvedama skaičiavime be šios taisyklės. Disertacijoje įrodomas keleto taisyklių leistinumas Hilberto tipo skaičiavimuose ir silpninimo struktūrinių taisyklių:

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{F, \Gamma \to \Delta}\ (w \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, F}\ (\to w)$$

leistinumas sekvenciniuose skaičiavimuose.

Tradiciniuose sekvenciniuose skaičiavimuose vykdant išvedimo paiešką yra būtina grįžti ir patikrinti visus įmanomus taisyklių taikymus kiekvienai sekvencijai. To išvengti padeda apverčiamos taisyklės. Taisyklė laikoma apverčiama, jeigu prielaida išvedama tada ir tik tada, kai išvedama išvada. Disertacijoje parodoma, kad visos loginės ir refleksyvumo taisyklės visuose apibrėžtuose sekvenciniuose skaičiavimuose yra apverčiamos. Šis faktas panaudojamas įrodyti kartojimo struktūrinių taisyklių leistinumui:

$$\frac{F, F, \Gamma \to \Delta}{F, \Gamma \to \Delta}\ (c \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, F, F}{\Gamma \to \Delta, F}\ (\to c)$$

Tačiau pagrindinė multimodalumo sekvencinių skaičiavimų problema: išvedimo paieškos baigtinumas. Sakoma, kad skaičiavimas yra baigtinės išvedimo paieškos, jeigu bet kokiai formulei galima sukonstruoti tik baigtinį skaičių išvedimo paieškos medžių ir neįmanoma sukonstruoti nė vieno begalinio išvedimo paieškos medžio. Jei visi išvedimo paieškos medžio lapai yra arba skaičiavimo aksiomos, arba sekvencijos, kurioms neįmanoma pritaikyti jokios skaičiavimo taisyklės, sakoma, kad išvedimo paieškos medis yra baigtas. Baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimuose visada įmanoma pasakyti, ar sekvencija išvedama, ar ne. Tam užtenka patikrinti kiekvieną baigtą išvedimo paieškos medį.

Nesunku parodyti, kad *GPC*, *GK* ir GK_n yra baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimai.

Pradiniai skaičiavimai multimodalumo logikoms su sąveika

Sąveika tarp agentų yra modeliuojama įvairiais būdais. Šioje disertacijoje nagrinėjama daugiaagentė sistema su centriniu agentu, kuris žino viską, kas žinoma kitiems agentams. Tokia sistema yra prasminga tik jeigu yra trys arba daugiau agentų: vienas centrinis ir du kiti.

Šiame darbe centrinis agentas žymimas raide c, kiti agentai — raide a, o bet kuris agentas (centrinis arba ne) — raide l. Čia nagrinėjamą sąveiką atitinka centrinio agento aksioma *(C)*: $\Box_a F \supset \Box_c F$. Žinoma ši aksioma taip pat kelia papildomų reikalavimų multimodalumo logikos Kripke struktūros freimams. Nesunku įsitikinti, kad ši aksioma teisinga bet kurioje struktūroje su freimu $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_c, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle$, kuris tenkina savybę $\mathcal{R}_c \subseteq \bigcap_{a \in [1,n]} \mathcal{R}_a$. Tačiau šią savybę įmanoma dar labiau susiaurinti. Disertacijoje įrodoma, kad formulė gali būti teisinga bet kurioje Kripke struktūroje su freimu $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_c, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n \rangle$, kur $\mathcal{R}_c \subseteq \bigcap_{a \in [1,n]} \mathcal{R}_a$, tada ir tik tada, jei ji yra teisinga bet kurioje Kripke struktūrose su freimu $\left\langle \mathcal{W}', \mathcal{R}_c', \mathcal{R}_1', \ldots, \mathcal{R}_n' \right\rangle$, kur $\mathcal{R}_c' \equiv \bigcap_{a \in [1,n]} \mathcal{R}_a'$. Savybė $\mathcal{R}_c' \equiv \bigcap_{a \in [1,n]} \mathcal{R}_a'$ darbe vadinama centrinio agento savybe.

Hilberto tipo skaičiavimai multimodalumo logikoms K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$ su centrinio agento aksioma (šios logikos žymimos atitinkamai K_n^c, T_n^c, $K4_n^c$ ir $S4_n^c$) yra gaunami prie skaičiavimų HK_n, HT_n, $HK4_n$ ir $HS4_n$ pridėjus centrinio agento aksiomą *(C)*. Gautieji skaičiavimai žymimi HK^c_n, HT^c_n, $HK4^c_n$ ir $HS4^c_n$.

Kaip minėta, formulių tapatus teisingumas multimodalumo logikose su centrinio agento aksioma apibrėžiamas analogiškai, kaip ir atitinkamose multimodalumo logikose be sąveikos, tačiau Kripke struktūrų freimai papildomai turi tenkinti centrinio agento savybę.

Iš tiesų centrinio agento žinojimo operatorius yra analogiškas paskirstyto žinojimo operatoriui D. Įtraukiant šį operatorių į Hilberto tipo skaičiavimus pridedama aksioma $\Box_a F \supset DF$. Be to, taip pat pridedama aksioma *(K_l)*, kur operatorius $\Box_l$ pakeičiamas į D, ir kitos analogiškai pakeistos modalinės aksiomos, galiojančios nagrinėjamoje logikoje. Formulės DF apibrėžimas visiškai atitinka formulės $\Box_c F$ apibrėžimą, turint omenyje centrinio agento savybę, kurią turi tenkinti Kripke struktūros freimas. Kadangi taip sudaryti Hilberto tipo skaičiavimai logikoms K_n, T_n, $K4_n$ ir $S4_n$ su paskirstyto žinojimo operatoriumi yra pilni ir korektiški, galima daryti išvadą, kad skaičiavimai HK^c_n, HT^c_n, $HK4^c_n$ ir $HS4^c_n$ taip pat yra pilni ir korektiški.

Sekvenciniai skaičiavimai logikoms K^c_n, T^c_n, $K4^c_n$ ir $S4^c_n$ (žymimi $GK^c_n cut$, $GT^c_n cut$, $GK4^c_n cut$ ir $GS4^c_n cut$) yra gaunami iš analogiškų multimodalinių sekvencinių skaičiavimų GK_n, GT_n, $GK4_n$ ir $GS4_n$, pridėjus pjūvio taisyklę:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, F \qquad F, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}\ (\text{cut } F)$$

Ir taisykles centrinio agento žinojimo operatoriui, priklausančias nuo logikos:

skaičiavimų $GK^c_n cut$ ir $GT^c_n cut$ atveju:

$$\frac{\Gamma_2 \to F}{\Gamma_1, \Box_* \Gamma_2 \to \Delta, \Box_c F}\ (\to \Box^c)$$

skaičiavimo $GK4^c_n cut$ atveju:

$$\frac{\Gamma_2, \Box_* \Gamma \to F}{\Gamma_1, \Box_* \Gamma_2 \to \Delta, \Box_c F}\ (\to \Box^c)$$

skaičiavimo $GS4_n$ atveju:

$$\frac{\Box_* \Gamma_2 \to F}{\Gamma_1, \Box_* \Gamma_2 \to \Delta, \Box_c F}\ (\to \Box^c)$$

Čia multiaibė $\Box_* \Gamma_2 = \Box_{l_1} F_1, \ldots, \Box_{l_k} F_k$, kur $k \geqslant 0$ ir l_j yra bet koks agentas visiems $j \in [1, k]$.

Tradiciniu būdu galima parodyti, kad silpninimo struktūrinė taisyklė yra leistina nagrinėjamuose multimodaliniuose skaičiavimuose su centrinio agento aksioma. Naudojantis tuo, galima parodyti, kad visos šių skaičiavimų taisyklės, išskyrus $(\mathrm{cut}\ F)$, $(\to \Box_l)$ ir $(\to \Box^c)$ yra apverčiamos.

Taisyklių apverčiamumas yra naudojamas parodant skaičiavimų pilnumą. Kadangi visos tapačiai teisingos logikos K_n^c (T_n^c, $K4_n^c$, $S4_n^c$) formulės yra išvedamos Hilberto tipo skaičiavime HK_n^c (atitinkamai HT_n^c, $HK4_n^c$, $HS4_n^c$) — tai seka iš šių skaičiavimų pilnumo, — vadinasi norint parodyti sekvencinio skaičiavimo $GK_n^c cut$ (atitinkamai $GT_n^c cut$, $GK4_n^c cut$, $GS4_n^c cut$) pilnumą, užtenka parodyti, kad visos formulės, kurios išvedamos Hilberto tipo skaičiavime, yra išvedamos ir Gentzeno tipo skaičiavime. Šioje disertacijoje tai įrodoma matematine indukcija pagal formulės išvedimo Hilberto tipo skaičiavime aukštį.

Iš tiesų, visos Hilberto tipo skaičiavimo aksiomos yra išvedamos analogiškuose Gentzeno tipo skaičiavimuose. Abiejų Hilberto tipo skaičiavimo taisyklių taikymai gali būti pakeisti analogiško sekvencinio skaičiavimo taisyklių taikymais. Taisyklės MP taikymas turint omenyje loginių taisyklių apverčiamumą gali būti pakeistas pjūvio taisyklės taikymu:

$$\frac{F \qquad F \supset G}{G} \quad \text{į} \quad \cfrac{\to F \qquad \cfrac{\to F \supset G}{F \to G}}{\to G}\,(\mathrm{cut}\ F)$$

O taisyklės NG_l taikymas — sekvencinio skaičiavimo taisyklės $(\to \Box_l)$ taikymu.

$$\frac{F}{\Box_l F} \quad \text{į} \quad \frac{\to F}{\to \Box_l F}\,(\to \Box_l)$$

To užtenka, norint parodyti Gentzeno tipų skaičiavimų $GK_n^c cut$, $GT_n^c cut$, $GK4_n^c cut$ ir $GS4_n^c cut$ pilnumą.

Įrodant šių skaičiavimų korektiškumą, naudojamas panašus metodas: įrodoma, kad jei sekvencija išvedama sekvenciniame skaičiavime, tai ją atitinkanti formulė yra išvedama ir atitinkamame Hilberto tipo skaičiavime. Tokiu atveju iš Hilberto tipo skaičiavimų korektiškumo seka ir sekvencinių skaičiavimų korektiškumas. Nesunku parodyti, kad sekvencinio skaičiavimo aksiomą atitinkanti formulė yra išvedama nagrinėjamuose Hilberto tipo skaičiavimuose. Tačiau sekvencinio skaičiavimo taisyklių taikymus reikia keisti Hilberto tipo išvedimo fragmentais. Šie fragmentai yra pakankamai ilgi, todėl pirmiausia yra parodomas kelių taisyklių leistinumas ir kelių formulių išvedamumas nagrinėjamuose Hilberto tipo skaičiavimuose. Dalis šių įrodymų yra perkelti į disertacijos priedą. Panaudojant šiuos papildomus rezultatus disertacijoje įrodomas skaičiavimų $GK^c_n cut$, $GT^c_n cut$, $GK4^c_n cut$ ir $GS4^c_n cut$ korektiškumas. Didžioji dalis šio įrodymo yra bendra visiems keturiems skaičiavimams, tačiau dėl skirtingų taisyklių būtinumo operatoriui įrodymai šiek tiek skiriasi.

Nors skaičiavimai $GK^c_n cut$, $GT^c_n cut$, $GK4^c_n cut$ ir $GS4^c_n cut$ yra pilni ir korektiški, tačiau išvedimo paieška juose nėra baigtinė. Taip yra visų pirma dėl pjūvio taisyklės: kadangi neribojama galimų pjūvio formulių aibė, todėl bet kokiai sekvencijai šią taisyklę galima taikyti be galo daug kartų renkantis vis kitą pjūvio formulę. Vienas iš sprendimų būtų apriboti šios taisyklės taikymus. Tačiau dėl to, kad sekvenciniuose skaičiavimuose multimodalumo logikoms be sąveikos GK_n, GT_n, $GK4_n$ ir $GS4_n$ pjūvio taisyklės nėra, ir dėl to, kad skaičiavimų $GK^c_n cut$, $GT^c_n cut$, $GK4^c_n cut$ ir $GS4^c_n cut$ taisyklė $(\to \Box^c)$ yra panaši į taisyklę $(\to \Box_l)$, pjūvio taisyklę iš šių skaičiavimų taip pat yra įmanoma eliminuoti. Sekvenciniai skaičiavimai be pjūvio logikoms K^c_n, T^c_n, $K4^c_n$ ir $S4^c_n$ žymimi GK^c_n, GT^c_n, $GK4^c_n$ ir $GS4^c_n$.

Skaičiavimų GK^c_n, GT^c_n, $GK4^c_n$ ir $GS4^c_n$ korektiškumas akivaizdus ir seka iš skaičiavimų $GK^c_n cut$, $GT^c_n cut$, $GK4^c_n cut$ ir $GS4^c_n cut$ korektiškumo. Tuo tarpu norint įrodyti pilnumą, tenka įrodinėti pjūvio eliminavimo teoremą. Prieš pradedant įrodymą, yra parodomas silpninimo struktūrinių taisyklių leistinumas, loginių ir refleksyvumo taisyklių apverčiamumas ir kartojimo struktūrinių taisyklių leistinumas. Šiais rezultatais yra naudojamasi pjūvio eliminavimo teoremos įrodyme.

Pjūvio eliminavimo teoremoje yra nagrinėjami tik tie išvedimo medžiai, kuriuose yra tik vienas pjūvio taisyklės taikymas, kuris yra pačioje išvedimo medžio apačioje. Vėliau indukcijos pagal pjūvio taisyklės taikymų kiekį pagalba šiuos rezultatus galima pritaikyti bet kuriam išvedimo medžiui. Teoremos įrodymui naudojama indukcija pagal sutvarkytą porą $\langle \mathrm{l}(F), h\rangle$, kur $\mathrm{l}(F)$ yra pjūvio formulės ilgis, o h — pjūvio taisyklės taikymo kairės ir dešinės prielaidų išvedimo medžių aukščių suma. Įrodymas taip pat priklauso nuo logikos, tačiau didelė jo dalis yra bendra visoms keturioms logikoms K^c_n, T^c_n, $K4^c_n$ ir $S4^c_n$. Disertacijoje pilnai pateikiamas pjūvio eliminavimo teoremos įrodymas logikai K^c_n, o tada nurodoma, kokius pakeitimus šiame įrodyme reikia padaryti, norint gauti įrodymus logikoms T^c_n, $K4^c_n$ ir $S4^c_n$. Pjūvio eliminavimo teorema įrodo bepjūvių skaičiavimų pilnumą.

Baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimai multimodalumo logikoms su sąveika

Iš gautųjų beciklių sekvencinių skaičiavimų GK_n^c, $GK4_n^c$, GT_n^c ir $GS4_n^c$ išvedimo paieška yra baigtinė tik skaičiavime GK_n^c. Šiame skyriuje tai yra įrodoma, o taip pat pateikiami nauji baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimai logikoms T_n^c, $K4_n^c$ ir $S4_n^c$.

Pirmiausia įrodoma, kad išvedimo paieška skaičiavime GK_n^c visada yra baigtinė. Iš tiesų, nesunku įsitikinti, kad visose šio skaičiavimo taisyklėse prielaidoje yra ne daugiau formulių, negu išvadoje. Be to, pagrindinė formulė, esanti išvadoje turi bent vienu loginiu operatoriumi daugiau, negu šoninė formulė taisyklės prielaidoje. Galiausiai, jokia skaičiavimo taisyklė negali būti pritaikyta sekvencijai, kurioje nėra loginių operatorių (tik propoziciniai kintamieji). Taigi, einant išvedimo paieškos medžiu iš apačios į viršų, sekvencijos ilgis visada mažėja, tačiau jis negali būti mažesnis už nulį. Taigi, bet koks išvedimo paieškos medis šiame skaičiavime yra baigtinis. Be to, kiekvienai sekvencijai įmanoma pritaikyti tik baigtinį taisyklių skaičių, taigi galima daryti išvadą, kad skaičiavimas GK_n^c yra baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimas.

Kaip ten bebūtų, skaičiavime GT_n^c išvedimo paieška nebūtinai yra baigtinė. Šio skaičiavimo išvedimo paieškos medžiuose gali atsirasti ciklų. Ciklas — tai išvedimo paieškos medžio šakos dalis tarp sekvencijų S_1 ir S_2 tokių, kad S_2 yra aukščiau medyje, negu S_1 ir S_2 galima gauti pritaikius kartojimo struktūrines taisykles sekvencijai S_1. Jeigu įmanoma sukonstruoti vieną ciklą, vadinasi bus įmanoma sukonstruoti jų ir daugiau ir tokiu būdu gauti begalinį išvedimo paieškos medį. Vienintelė ciklų priežastis skaičiavime GT_n^c yra refleksyvumo taisyklė $(\Box_l \to)$. Taikant šią taisyklę tai pačiai formulei vėl ir vėl galima gauti begalinį išvedimo paieškos medį. Tačiau tokią problemą nesunku išspręsti: tereikia pasižymėti, kuriai formulei ši taisyklė jau buvo taikyta. Šioje disertacijoje toks pažymėjimas atliekamas operatorių $\Box_l$ keičiant į $\Box_l^*$. Dėl to keičiasi refleksyvumo taisyklė. Be to, kadangi atsiranda žvaigždute žymėtos modalumo įeitys, keičiasi ir tranzityvumo bei centrinio agento taisyklių forma. Taigi sekvencinis baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimas modalumo logikai T_n^c (žymimas $G^*T_n^c$) gaunamas skaičiavime GT_n^c refleksyvumo, tranzityvumo ir centrinio agento taisykles pakeitus į:

$$\frac{F, \Box_l^* F, \Gamma \to \Delta}{\Box_l F, \Gamma \to \Delta}\ (\Box_l \to)^*$$

$$\frac{\Gamma_2, \Gamma_3 \to F}{\Gamma_1, \Box_l \Gamma_2, \Box_l^* \Gamma_3 \to \Delta, \Box_l F} \ (\to \Box_l)^* \qquad \frac{\Gamma_2, \Gamma_3 \to F}{\Gamma_1, \Box_* \Gamma_2, \Box_*^* \Gamma_3 \to \Delta, \Box_c F} \ (\to \Box^c)^*$$

Čia $\Box_*\Gamma_2 = \Box_{l_1}F_1, \ldots, \Box_{l_k}F_k$, kur $k \geqslant 0$ ir l_j yra bet koks agentas visiems $j \in [1, k]$, o $\Box_*^*\Gamma_3 = \Box_{l_1'}^* G_1, \ldots, \Box_{l_m'}^* G_m$, kur $m \geqslant 0$ ir l_j' yra bet koks agentas visiems $j \in [1, m]$.

Akivaizdu, kad šis skaičiavimas yra korektiškas, nes iš išvedimo medžio šiame skaičiavime pašalinę visas žvaigždutes gausime išvedimo medį skaičiavime GT_n^c. Įrodant skaičiavimo $G^*T_n^c$ pilnumą naudojamas skaičiavimo GT_n^c pilnumas ir vienas tarpinis skaičiavimas. Tarpiniame skaičiavime įvedamos žvaigždutės, tačiau leidžiamas refleksyvumo taisyklų taikymas formulėms $\Box_l^* F$. Taigi visos skaičiavime GT_n^c išvedamos sekvencijos yra išvedamos ir tarpiniame skaičiavime. Toliau naudojant indukciją pagal skaičiavimui $G^*T_n^c$ netinkamų refleksyvumo taisyklių taikymų skaičių įrodoma, kad išvedimo medis tarpiniame skaičiavime gali būti transformuotas į išvedimo medį skaičiavime $G^*T_n^c$. Pastarajame įrodyme naudojamas kartojimo struktūrinių taisyklių leistinumas tarpiniame skaičiavime.

Įrodant, kad išvedimo paieška skaičiavime $G^*T_n^c$ yra baigtinė, naudojamas sekvencijos ilgis (žymimas $\mathrm{l}(S)$), o taip pat apibrėžiami du papildomi dydžiai: sekvencijos atvirasis modalumas (žymimas $\mathrm{om}(S)$) ir sekvencijos T_n^c-galia (žymima $\mathrm{tp}(S)$). Sekvencijos ilgis riboja loginių, atvirasis modalumas — refleksyvumo, o T_n^c-galia — tranzityvumo taisyklių taikymų kiekį. Šių dydžių apibrėžimai panašūs į tuos, kurie vėliau naudojami tranzityvių logikų skaičiavimuose. Disertacijoje parodoma, kad einant išvedimo paieškos medžiu iš apačios į viršų skaičiavime $G^*T_n^c$ sutvarkyto trejeto $\langle \mathrm{tp}(S), \mathrm{om}(S), \mathrm{l}(S) \rangle$ reikšmė mažėja, tačiau ji negali mažėti amžinai. Iš šio įrodymo seka, kad išvedimų paieška skaičiavime $G^*T_n^c$ visada yra baigtinė.

Prieš pateikiant baigtinės išvedimo paieškos skaičiavimus logikoms $K4_n^c$ ir $S4_n^c$, pirmiausia yra pristatomas naujas metodas, užtikrinantis išvedimų paieškos baigtinumą, sekvenciniuose skaičiavimuose monomodalumo logikoms $K4$ ir $S4$. Šiame metode yra naudojamos įvairios žymės ir indeksai. Visų pirma, pritaikius refleksyvumo taisyklę išorinė pagrindinės formulės modalumo įeitis yra pažymimas žvaigždute, kaip ir logikos $G^*T_n^c$ atveju. Be to, kad būtų išvengta perteklinių refleksyvumo taisyklių taikymų, žvaigždute taip pat pažymimos visos pagrindinės formulės įeitys kitose formulėse. Kad galima būtų tai padaryti, visos neigiamos $\Box$ įeitys yra indeksuojamos.

Siekiant pažymėti, kurioje išvedimo paieškos medžio vietoje formulė atsirado sekvencijoje, naudojama formulių numeracija. Formulė rašoma laužtiniuose skliaustuose, o numeris — kaip viršutinis indeksas: $[\Box p \wedge q]^1$. Iš tiesų, svarbu žinoti, tik kurios formulės naujai atsirado po tranzityvumo taisyklės taikymo, taigi naujas formulių numeris išvedimo paieškos medyje atsiranda tik po tranzityvumo taisyklės taikymo.

Teigiamos $\Box$ įeitys taip pat yra indeksuojamos, nes reikia identifikuoti visas galimas tranzityvumo taisyklės pagrindines formules, kad būtų galima patikrinti, ar ši taisyklė šiai formulei buvo taikyta anksčiau. Tačiau pakanka indeksuoti tik tas $\Box$ įeitis, kurios patenka į neigiamos $\Box$ įeities veikimo sritį, nes kitu atveju pagrindinė tranzityvumo taisyklės taikymo formulė niekada daugiau išvedimo paieškos medyje pasirodyti negali. Natūralūs skaičiai pradedant 1 naudojami indeksuoti tiek teigiamas tiek neigiamas $\Box$ įeitis, tačiau neigiamas indeksas pradedamas simboliu $\ominus$, pavyzdžiui, $\Box^1, \Box^{\ominus 1}$.

Galiausiai, naudojamos žymės, kurios rodo, ar šiai formulei buvo taikyta tranzityvumo taisyklė ir jei taip, tai kurioje išvedimo paieškos medžio vietoje. Žymės rašomos skliaustuose po indekso, pavyzdžiui, $\Box^{5(3)}$.

Sekvencija, kurios visos teigiamos $\Box$ įeitys, patenkančios į neigiamos $\Box$ įeities veikimo sritį, yra indeksuotos teigiamu indeksu, visos neigiamos $\Box$ įeitys yra arba indeksuotos neigiamu indeksu arba pažymėtos žvaigždute, o visos formulės yra numeruotos, vadinama logikai *S4* pažymėta sekvencija. Be to, pradinei išvedimų paieškos medžio sekvencijai taip pat turi būti suteiktos pradinės žymės ir indeksai. Sekvencijos pažymėjimas logikai *S4* — tai visų teigiamų $\Box$ įeičių, kurios patenka į neigiamos $\Box$ įeities veikimo sritį, indeksavimas skirtingais natūraliais skaičiais, visų neigiamų $\Box$ įeičių indeksavimas skirtingais indeksais $\ominus i$ ir visų formulių sunumeravimas 1. Skaičiavimas, kuriame naudojamos žymės ir indeksai, vadinamas žymėtu skaičiavimu. Tokiame skaičiavime visos sekvencijos yra pažymėtos, o pradinė sekvencija gaunama pažymint paprastą sekvenciją. Iš formulės F pašalinus visas žymes ir indeksus gaunama formulė, kuri vadinama F projekcija (žymima $\mathrm{Proj}(F)$).

Beciklis sekvencinis žymėtas skaičiavimas logikai *S4* (žymimas *G*S4*) yra gaunamas skaičiavime *GS4* pakeitus refleksyvumo ir tranzityvumo taisykles ir pridėjus prastinimo taisyklę:

Pakeista refleksyvumo taisyklė:

$$\frac{[F]^n, [\Box^* F]^n, \Gamma^{\ominus i*} \to \Delta^{\ominus i*}}{[\Box^{\ominus i} F]^n, \Gamma \to \Delta} \; (\Box^{\ominus i} \to)$$

čia $\Gamma^{\ominus i*}$ $(\Delta^{\ominus i*})$ gaunama iš Γ (atitinkamai Δ), pakeičiant visas $\Box^{\ominus i}$ įeitis į $\Box^*$.

Pakeista tranzityvumo taisyklė:

$$\frac{[\Gamma^{i\leftarrow n}]^n, \Box^*\Gamma^{i\leftarrow n} \to [F]^n}{\Box^*\Gamma, \Sigma_1 \to \Sigma_2, \Box\Delta, [\Box^{i(m)}F]^{n-1}} (\to \Box^i)$$

čia Σ_1 ir Σ_2 yra arba tušti, arba sudaryti tik iš propozicinių kintamųjų. Jei $\Gamma = [G_1]^{n_1}, \ldots, [G_k]^{n_k}$, tada $[\Gamma]^n = [G_1]^n, \ldots, [G_k]^n$. Jei $i = \varnothing$, tada $\Gamma^{i\leftarrow n} = \Gamma$, o jei $i \neq \varnothing$, tada $\Gamma^{i\leftarrow n}$ gaunamas iš Γ pakeitus visas $\Box^{i(m)}$ įeitis į $\Box^{i(n)}$.

Be to, tranzityvumo taisyklė gali būti taikoma tik jei $(m) = \varnothing$, arba multiaibėje $\Box^*\Gamma$ galima rasti tokią formulę $[\Box^* H]^l$, kad $m < l \leqslant n - 1$.

Nauja prastinimo taisyklė:

$$\frac{[\Box^* F]^{n_1}, \Gamma \to \Delta}{[\Box^* F]^{n_1}, [\Box^* F]^{n_2}, \Gamma \to \Delta} (\Box^{n_1,n_2} \to)$$

čia $n_1 < n_2$.

Jei įmanoma, prastinimo taisyklė turi būti taikoma pirmiausia.

Šio skaičiavimo aksioma yra $\Gamma, [F_1]^n \to [F_2]^n, \Delta$, kur $\mathrm{Proj}(F_1) = \mathrm{Proj}(F_2)$.

Skaičiavimo *G*S4* pilnumas, korektiškumas ir tai, kad išvedimo paieška jame yra baigtinė, įrodyta [4]. Be to, ten pat yra aprašyta, kaip šis skaičiavimas buvo gautas iš kito skaičiavimo, pateikto [12].

Skaičiavime $GS4_n^c$ ciklų problema yra iš esmės tokia pati, kaip ir skaičiavime *GS4*, taigi siekiant užtikrinti išvedimų paieškos baigtinumą gali būti taikomi panašūs metodai. Skaičiavime $GS4_n^c$ yra dvi panašios taisyklės — $(\to \Box_l)$ (tranzityvumas) ir $(\to \Box^c)$ (centrinio agento taisyklė), todėl toliau jos bus vadinamos sukcedentinėmis taisyklėmis.

Neskaitant visų panašumų, skaičiavimai $GS4_n^c$ ir *GS4* turi vieną reikšmingą skirtumą. Monomodaliniame skaičiavime, formulės, prasidedančios modalumu, niekada nedingsta iš sekvencijos antecedento. Kitaip sakant, jei tokia formulė priklauso kokio nors taisyklės taikymo išvados antecedentui, tai ji priklausys ir visų šio taikymo prielaidų antecedentams. Tačiau tai negalioja multimodaliniame skaičiavime, kuriame taisyklės $(\to \Box_l)$ taikymas išbraukia iš prielaidos antecedento visas išvados antecedente esančias formules, prasidedančias modalumo $\Box_{l'}$, kur $l' \neq l$, įeitimi.

Nepaisant šio skirtumo, išvedimo paieškos baigtinumui skaičiavime $GS4_n^c$ gauti naudojamos tos pačios žymės ir indeksai, jų prasmė yra panaši, tačiau taikymas kai kuriais atvejais šiek tiek skiriasi. Visų pirma, norint išvesti sekvenciją skaičiavime $GS4_n^c$ kartais gali tekti taikyti refleksyvumo taisyklę daugiau nei vieną kartą tai pačiai formulei. Pavyzdžiui, formulei $\Box_l F$ gali tekti taikyti refleksyvumo taisyklę kelis kartus, jei tarp šių taikymų yra tranzityvumo taisyklės taikymas formulei $\Box_{l'} G$, kur $l' \neq l$. Todėl pritaikius refleksyvumo taisyklę formulei $\Box_l^{\ominus i} F$ visos neigiamo indekso $\ominus i$ įeitys yra pažymimos žvaigždute, tačiau, priešingai nei skaičiavime G^*S4, pats indeksas nėra pašalinamas. Tokia žvaigždute žymėta neigiama indeksuoto modalumo įeitis žymima $\Box_l^{*i}$. Žvaigždutės yra prasmingos tik tol, kol formulė $\Box_l^{*i} F$ yra antecedente, taigi l'-tranzityvumo taisyklės taikymas pakeičia visų agentų, išskyrus l', žvaigždute žymėtas neigiamas modalumo įeitis atgal į paprastas neigiamai indeksuotas modalumo įeitis.

Žymių naudojimas taip pat turi būti pakeistas. Skaičiavime G^*S4 žymių taikymas pagrįstas tuo, kad formulė, prasidedanti modalumu, niekada nedingsta iš sekvencijos antecedento. Multimodaliniu atveju, tai teisinga tik formulėms $\Box_l F$, kol taikoma l-tranzityvumo taisyklė, ir visoms formulėms, prasidedančioms modalumu, kol taikoma centrinio agento taisyklė. Taigi modalumo $\Box_l$ įeičių žymės yra prasmingos tol, kol iš tranzityvumo taisyklių taikoma tik $(\rightarrow \Box_l)$. Taigi, po l-tranzityvumo taisyklės taikymo visų agentų, išskyrus l, modalumo įeičių žymės turi būti pašalintos. Tai negalioja centrinio agento taisyklei.

Taip pat keičiasi teigiamų modalumo įeičių, kurias reikia indeksuoti, aibė. Teigiama modalumo įeitis $\Box_a$ vadinama indeksuotina, jei ji yra neigiamos modalumo $\Box_a$ įeities veikimo srityje. Teigiama modalumo įeitis $\Box_c$ yra indeksuotina, jeigu ji yra neigiamos modalumo $\Box_l$, kuriam nors l, įeities veikimo srityje. Taigi, sekvencija, kurios visos indeksuotinos teigiamos $\Box_l$ įeitys, yra indeksuotos teigiamu indeksu, visos neigiamos $\Box_l$ įeitys yra arba indeksuotos neigiamu indeksu arba pažymėtos žvaigždute, o visos formulės yra numeruotos, vadinama logikai $S4_n^c$ pažymėta sekvencija. Sekvencijos pažymėjimas logikai $S4_n^c$ — tai visų indeksuotinų teigiamų $\Box_l$ įeičių indeksavimas skirtingais natūraliais skaičiais, visų neigiamų $\Box_l$ įeičių indeksavimas skirtingais indeksais $\ominus i$ ir visų formulių sunumeravimas 1.

Galiausiai, dvi sukcedentinės taisyklės kelia papildomų problemų. Teigiama formulės $\Box_c F$ įeitis gali būti jų abiejų pagrindine formule. Šiuo atveju reiktų žymėtis, ar anksčiau formulei buvo taikyta tranzityvumo, ar centrinio agento taisyklė. Tačiau šios situacijos galima išvengti, uždraudus taikyti c-tranzityvumo taisyklę.

Taigi, beciklis sekvencinis žymėtas skaičiavimas logikai $S4_n^c$ (žymimas

$G^{*}S4_n^c$) gaunamas skaičiavime $S4_n$ pakeitus refleksyvumo ir sukcedentines taisykles, ir pridėjus prastinimo taisyklę.

Pakeista refleksyvumo taisyklė:

$$\frac{[F]^n, [\Box_l^{*i} F]^n, \Gamma^{\ominus i *} \to \Delta^{\ominus i *}}{[\Box_l^{\ominus i} F]^n, \Gamma \to \Delta} (\Box_l^{\ominus i} \to)$$

čia $\Gamma^{\ominus i *}$ ($\Delta^{\ominus i *}$) yra gaunama iš Γ (atitinkamai Δ) pakeitus visas $\Box_l^{\ominus i}$ įeitis į $\Box_l^{*i}$.
Pakeista tranzityvumo taisyklė:

$$\frac{\left\{[\Gamma_1^{i \leftarrow n}]^n, \Box_a^{*} \Gamma_1^{i \leftarrow n} \to [F]^n\right\}^{\neq a: \not *, (\not)}}{\Box_a^{*} \Gamma_1, \Box_{\neq a}^{*} \Gamma_2, \Sigma_1 \to \Sigma_2, \Box_{*} \Delta, [\Box_a^{i(m)} F]^{n-1}} (\to \Box_a^{i})$$

čia Σ_1 ir Σ_2 yra tušti, arba sudaryti tik iš propozicinių kintamųjų, $a \neq c$. Sekvencija $\{S\}^{\neq a: \not *, (\not)}$ gaunama iš sekvencijos S pakeitus visas $\Box_l^{*j}$ įeitis į $\Box_l^{\ominus j}$ ir visas $\Box_l^{j(m')}$ įeitis į $\Box_l^{j}$ kiekvienam $l \neq a$, kiekvienam j ir kiekvienam m'.
Be to, tranzityvumo taisyklė gali būti taikoma tik jeigu $(m) = \varnothing$ arba aibėje $\Box_a^{*} \Gamma_1$ yra bent viena formulė $[\Box_a^{*j} H]^{n_1}$, kur $m < n_1 \leqslant n-1$.
Pakeista centrinio agento taisyklė:

$$\frac{[\Gamma^{i \leftarrow n}]^n, \Box_{*}^{*} \Gamma^{i \leftarrow n} \to [F]^n}{\Box_{*}^{*} \Gamma, \Sigma_1 \to \Sigma_2, \Box_{*} \Delta, [\Box_c^{i(m)} F]^{n-1}} (\to \Box^{c,i})$$

čia Σ_1 ir Σ_2 yra tušti, arba sudaryti tik iš propozicinių kintamųjų.
Tranzityvumo taisyklė taip pat gali būti taikoma tik jeigu $(m) = \varnothing$ arba aibėje $\Box_{*}^{*} \Gamma$ yra bent viena formulė $[\Box_l^{*j} H]^{n_1}$, kokiam nors l, kur $m < n_1 \leqslant n-1$.
Nauja prastinimo taisyklė:

$$\frac{[\Box_l^{*i} F]^{n_1}, \Gamma \to \Delta}{[\Box_l^{*i} F]^{n_1}, [\Box_l^{*i} F]^{n_2}, \Gamma \to \Delta} (\Box_l^{n_1, n_2} \to)$$

kur $n_1 < n_2$.
Jei įmanoma, prastinimo taisyklė turi būti taikoma pirmiausia.

Skaičiavimo aksioma yra $\Gamma, [F_1]^n \to [F_2]^n, \Delta$, kur $\mathrm{Proj}(F_1) = \mathrm{Proj}(F_2)$.

Skaičiavimo $G^{*}S4_n^c$ korektiškumui parodyti naudojamas skaičiavimo $GS4_n^c$ korektiškumas. Iš tiesų nesunku parodyti, kad bet kokį išvedimo medį becikliame skaičiavime galima pakeisti į išvedimo medį skaičiavime $GS4_n^c$.

Tereikia pašalinti visas žymes ir indeksus bei sukcedentinių taisyklių taikymus pakeisti $GS4_n^c$ tipo sukcedentinių taisyklių ir keleto refleksyvumo taisyklių taikymais.

Tuo tarpu pilnumo įrodymas kelia žymiai daugiau problemų. Tiesa, tam taip pat naudojamas skaičiavimo $GS4_n^c$ pilnumas, tačiau siekiant aiškiau įrodyti kiekvieno beciklio skaičiavimo elemento būtinumą, yra naudojami septyni tarpiniai skaičiavimai, kuriuose pakeitimai įvedami po vieną. Šių tarpinių skaičiavimų pilnumui įrodyti yra naudojamas loginių ir refleksyvumo taisyklių apverčiamumas, silpninimo ir kartojimo struktūrinių taisyklių leistinumas, o taip pat skaičiavimui $G^*S4_n^c$ būdingos savybės. Visų pirma tai, kad kiekvieno išvedimo paieškos medžio pradinė sekvencija yra gauta pažymėjus paprastą sekvenciją, taigi joje nėra nei neigiamo modalumo įeičių indeksuotų žvaigždute, nei teigiamo modalumo įeičių su žyme. Be to, bet kokios taisyklės (išskyrus prastinimo) taikymo pagrindinė formulė turi didžiausią numerį visoje sekvencijoje. Prastinimo taisyklės atveju viena iš dviejų pagrindinių formulių turi didžiausią numerį. Taip pat sukcedentinės taisyklės taikymas prielaidoje įveda naują numerį, kuris yra didesnis už bet kurį numerį, esantį išvadoje. Ir galiausiai jei n yra didžiausias numeris sekvencijoje, tai visos jos formulės yra numeruotos n, išskyrus antecedento formules $\Box_l^{*i}F$, kurios gali turėti mažesnius numerius. Panaudojant šias savybes gaunamas tarpinių skaičiavimų pilnumas, iš kurio seka beciklio skaičiavimo $G^*S4_n^c$ pilnumas.

Įrodant, kad išvedimo paieška skaičiavime $G^*S4_n^c$ bet kuriuo atveju yra baigtinė, naudojami įvairūs dydžiai. Visų pirma sekvencijos ilgis ($\mathrm{l}(S)$) riboja loginių taisyklių taikymų kiekį. Be to, taikant refleksyvumo taisyklę, mažėja žvaigždute nežymėtų neigiamo modalumo įeičių. Tai žymima $\mathrm{sm}(S)$. Be to, tranzityvumo ir centrinio agento taisyklių taikymų kiekį riboja dydžiai, šioje disertacijoje vadinami atitinkamai galia (žymima $\mathrm{p}(S)$) ir centrine galia (žymima $\mathrm{c}(S)$). Šie dydžiai iš esmės parodo kiek liko skirtingų būdų pritaikyti sukcedentinę taisyklę. Tiesa, $\mathrm{p}(S)$ mažėja tik taikant to pačio agento tranzityvumo taisykles. Tačiau, jeigu po l-tranzityvumo taisyklių taikymų yra taikoma l_1-tranzityvumo taisyklė ($l \neq l_1$) ir sekvencijos galia nesumažėja, tada būtinai sumažėja skirtingų neigiamų modalumo įeičių kiekis (žymimas $\mathrm{nm}(S)$). Taigi išvedimo paieškos baigtinumas skaičiavime $G^*S4_n^c$ parodomas įrodant, kad einant išvedimo paieškos medžiu aukštyn mažėja sutvarkyto penketo $\langle \mathrm{nm}(S), \mathrm{p}(S), \mathrm{c}(S), \mathrm{sm}(S), \mathrm{l}(S) \rangle$ reikšmė.

Išvedimo paieškos baigtinumas skaičiavimuose $GK4$ ir $GK4_n^c$ gali būti gaunamas panaudojus tuos pačius metodus kaip ir skaičiavimų $GS4$ ir $GS4_n^c$ atveju. Pagrindinis skirtumas tarp šių skaičiavimų yra tai, kad pirmuosiuose nėra refleksyvumo taisyklės. Taigi visų pirma becikliai skaičiavimai logikoms $K4$ ir $K4_n^c$ (žymimi G^*K4 ir $G^*K4_n^c$) skiriasi nuo skaičiavimų G^*S4 ir $G^*S4_n^c$ tuo, kad juose nėra refleksyvumo taisyklės. Dėl šios priežasties, šiuose skaičiavimuose nereikalingas neigiamų modalumo įeičių indeksavimas ir nėra naudojamos žvaigždutės. Tai turi įtakos ir kitų taisyklių formai. Vienintelis kitas skirtumas yra tai, kad sukcedentinių taisyklių sąlygoje naudojamas apribojimas $m \leqslant n_1 \leqslant n-1$ vietoje skaičiavimuose G^*S4 ir $G^*S4_n^c$ esančio apribojimo $m < n_1 \leqslant n-1$. Skaičiavimų G^*K4 ir $G^*K4_n^c$ pilnumo, korektiškumo ir išvedimo paieškos baigtinumo įrodymai yra analogiški skaičiavimų G^*S4 ir $G^*S4_n^c$ atvejui.

Išvados

Disertacijoje pristatomi nauji sekvenciniai skaičiavimai multimodalumo logikoms K_n^c, T_n^c, $K4_n^c$ ir $S4_n^c$ su centrinio agento aksioma. Šie skaičiavimai gauti tradicinius sekvencinius skaičiavimus multimodalumo logikoms papildžius centrinio agento aksiomai reikalinga taisykle. Šios taisyklės panašumas į taisyklę $(\to \Box_l)$ leidžia be didesnių problemų įrodyti pjūvio eliminavimo teoremą. Ši idėja gali būti panaudota kuriant sekvencinius skaičiavimus kitoms multimodalumo logikoms su centrinio agento aksioma arba su aksioma, kuri yra panaši į centrinio agento aksiomą, pavyzdžiui: $\Box_{l_1} F \supset \Box_{l_2} F$.

Darbe pristatomas naujas metodas užtikrinti išvedimo paieškos baigtinumą. Jame naudojami indeksai, žymės, žvaigždutės ir formulių numeriai. Nors disertacijoje naujasis metodas yra pritaikomas tik sekvenciniams skaičiavimams monomodalumo logikoms $K4$ ir $S4$ bei multimodalumo logikoms $K4_n^c$ ir $S4_n^c$, jis taip pat gali būti naudojamas ir kitais atvejais. Visų pirma, jį nesunku pritaikyti Gentzeno tipo skaičiavimuose multimodalumo logikoms $K4_n$ ir $S4_n$. Be to, šį metodą galima taikyti multimodalumo logikose su kitokiomis sąveikos aksiomomis. Tuo tarpu atskiros šio metodo idėjos gali būti naudojamos ir kitose logikose.

Galiausiai, kaip parodyta darbe, centrinio agento žinios iš tiesų yra kitų agentų paskirstytos žinios. Taigi visi disertacijoje pristatomi metodai gali būti naudojami kuriant baigtinės išvedimo paieškos sekvencinius skaičiavimus modalumo logikoms su paskirstytu žinojimu.

Summary of the Dissertation

The knowledge of agents is usually modelled using logic *S5*. However in some cases it is preferable to use other modal logics, for example *S4* or even its multimodal variant $S4_n$. Although multimodal epistemic logics are capable of modelling knowledge of many different agents, they do not include interaction between them. In this dissertation one particular form of interaction is chosen: one of the agents is called the central agent, because it knows everything that is known to other agents. This interaction is essentially the same as distributed knowledge.

The main aim of this thesis is to present a sequent calculus for multimodal logic $S4_n$ with central agent axiom in which every derivation search terminates. To achieve this task, a new method of obtaining termination of derivation search is developed for monomodal logic *S4*, which is later extended to multimodal logic $S4_n$ with central agent axiom. This method uses different kind of labels: positive and negative indexes of the modality, stars of the negatively indexed modality, marks of the positively indexed modality and formula numbers. These labels are used to restrict the applications of the rules, which causes loops in derivation search trees.

Moreover, during the research terminating sequent calculi for epistemic logics K_n, T_n and $K4_n$ are developed and they are presented here. Finally, the proofs of soundness and completeness of the constructed calculi are presented and the termination of every derivation search in the terminating calculi is demonstrated.

Aim of the Work and Defending Statements

Hilbert-type calculus is a usual way to define a deduction system for modal logic. In such system the needed properties of the logic are formulated as axioms and several derivation rules. Although such definition is very convenient for semantic discussion, however the derivation search process using this technique causes a lot of problems. Therefore, in this thesis Gentzen-type calculus (also known as sequent calculus) is used. The main aim of the research is to develop a terminating sequent calculus for multimodal logic $S4_n$ with central agent axiom. However, during the research similar results for other epistemic logics such as K_n, T_n and $K4_n$ with central agent axiom were obtained and they are also presented here.

These statements are presented for defence:

1. New constructed Gentzen-type calculi for multimodal logics K_n, T_n, $K4_n$ and $S4_n$ with central agent axiom demonstrate how central agent axiom can be modelled in sequent calculi without causing problems in cut-elimination.
2. New method of obtaining finite derivation search is developed. This method is applied to obtain new terminating Gentzen-type calculi for transitive monomodal logics $K4$ and $S4$.
3. This new method is extended to obtain new terminating Gentzen-type calculi for transitive multimodal logics $K4_n$ and $S4_n$ with central agent axiom. Some ideas of this method are used to construct such calculus for logic T_n with central agent axiom.

The author's research is documented in 6 articles. 2 articles ([2, 4]) are in the periodical journals, included in Scientific Master Journal List (ISI). Other articles ([1, 3, 5, 6]) are in the international refereed journals.

The results are also presented in 4 conferences and in the seminars of Mathematical Logic Sector at Software Engineering Department of Vilnius University Institute of Mathematics and Informatics.

Outline of the Dissertation

In the first chapter of the dissertation initial Hilbert-type and Gentzen-type calculi for classical, monomodal and multimodal logics are defined, some important measures are introduced as well as some properties of the mentioned calculi are proved. Among the most important properties are invertibility of most of the rules and admissibility of weakening and contraction in the presented sequent calculi.

In the second chapter central agent axiom is presented and the relation between central agent knowledge and distributed knowledge is described. Next Hilbert-type calculi for multimodal logics K_n, T_n, $K4_n$ and $S4_n$ with central agent axiom are presented. From them Gentzen-type calculi are derived and their equivalence is proved. In the final section of the chapter the cut-elimination theorem for all the considered calculi is proved.

The third chapter presents terminating calculi for all the considered logics and proves that every derivation search in the presented calculi terminates. In fact, cut-free calculus for K_n with central agent axiom is already terminating and the one for T_n with central agent axiom requires only minor changes. To make the dissertation clearer, the terminating calculi for monomodal logics $K4$ and $S4$ are presented before discussing the cases of multimodal logics $K4_n$ and $S4_n$ with central agent axiom. The soundness and completeness of all the newly introduced calculi are also proved in the chapter.

The annex of the dissertation presents the proof of the lemma about the derivability of some formulas in Hilbert-type calculi.

Autoriaus publikacijos

Autoriaus publikacijų disertacijos tema sąrašas:

1. Moksliniai straipsniai periodiniuose leidiniuose, įtrauktuose į Scientific Master Journal (ISI) sąrašą:
   (a) J. Andrikonis. Cut elimination for S4n and K4n with the central agent axiom. *Lithuanian Mathematical Journal*, **49**(2), pp. 123–139, 2009.
   (b) J. Andrikonis. Loop-free calculus for modal logic S4. *Lithuanian Mathematical Journal*, Liepa 2011. Priimtas spausdinti.

2. Moksliniai straipsniai kituose tarptautiniuose žurnaluose:
   (a) J. Andrikonis and R. Pliuškevičius. Cut elimination for knowledge logic with interaction. *Lithuanian Mathematical Journal*, **47**(spec. nr.), pp. 346–350, 2007.
   (b) J. Andrikonis. Cut-elimination for knowledge logics with interaction. *Lithuanian Mathematical Journal*, **48/49**(spec. nr.), pp. 263–268, 2008.
   (c) J. Andrikonis. Loop-free sequent calculus for modal logic K4. *Lithuanian Mathematical Journal*, **50**(spec. nr.), pp. 241–246, 2009.
   (d) J. Andrikonis and R. Pliuškevičius. Contraction-free calculi for modal logics S5 and KD45. *Lithuanian Mathematical Journal*, **51**(spec. nr.), Rugpjūtis 2011. Priimtas spausdinti.

Žinios apie autorių

Julius Andrikonis gimė 1982 m. kovo 4 d.

1988 – 1995: 7-oji vidurinė mokykla, Vilnius.

1995 – 1998, 1999 – 2000: Vilniaus jėzuitų gimnazija.

1998 – 1999: Ampleforth College, Didžioji Britanija.

2000 – 2004: Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Informatikos bakalauro laipsnis.

2003 vasaris – 2008 rugpjūtis: Lietuvos bankas, Statistikos departamentas, Vyriausiasis informatikos specialistas.

2004 – 2006: Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Informatikos magistro laipsnis.

2006 – 2010: Matematikos ir informatikos institutas, Programų sistemų inžinerijos skyrius, Matematinės logikos sektorius, doktorantas.

2006 rugsėjis – dabar: Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Informatikos katedra, Asistentas.

Literatūra

[1] J. Andrikonis. Cut-elimination for knowledge logics with interaction. *Lithuanian Mathematical Journal*, **48/49**(spec. nr.), pp. 263–268, 2008.

[2] J. Andrikonis. Cut elimination for S4n and K4n with the central agent axiom. *Lithuanian Mathematical Journal*, **49**(2), pp. 123–139, 2009.

[3] J. Andrikonis. Loop-free sequent calculus for modal logic K4. *Lithuanian Mathematical Journal*, **50**(spec. nr.), pp. 241–246, 2009.

[4] J. Andrikonis. Loop-free calculus for modal logic S4. *Lithuanian Mathematical Journal*, Liepa 2011. Priimtas spausdinti.

[5] J. Andrikonis and R. Pliuškevičius. Cut elimination for knowledge logic with interaction. *Lithuanian Mathematical Journal*, **47**(spec. nr.), pp. 346–350, 2007.

[6] J. Andrikonis and R. Pliuškevičius. Contraction-free calculi for modal logics S5 and KD45. *Lithuanian Mathematical Journal*, **51**(spec. nr.), Rugpjūtis 2011. Priimtas spausdinti.

[7] R. Goré and L. A. Nguyen. Clausal tableaux for multimodal logics of belief. *Fundamenta Informaticae*, **94**(1), pp. 21–40, 2009.

[8] J. Y. Halpern and Y. Moses. A guide to the modal logics of knowledge and belief. In A. K. Joshi, (Ed.), *Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 480–490, Los Angeles, California, USA, 1985. Morgan Kaufmann.

[9] A. Heuerding, M. Seyfried, and H. Zimmermann. Efficient loop-check for backward proof search in some non-classical propositional logics. In P. Miglioli, U. Moscato, D. Mundici, and M. Ornaghi, (Eds.), *Proceedings of the 5th Workshop on Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods*, volume 1071 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 210–225, Terrassini, Italy, 1996.

[10] S. Kanger. *Provability in logic.* Almgvist & Wiksell, Stockholm, 1957.

[11] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics.* D. van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1950.

[12] D. Leszczyńska-Jasion. A loop-free decision procedure for modal propositional logics K4, S4 and S5. *Journal of Philosophical Logic*, **38**(2), pp. 151–177, 2009.

[13] A. Lomuscio and M. Ryan. Ideal agents sharing (some!) knowledge. In *Proceedings of 13th European Conference on Artificial Intelligence ECAI-98*, pp. 557–561, Brighton, 1998.

[14] A. Lomuscio and M. Ryan. A spectrum of modes of knowledge sharing between agents. In N. R. Jennings and Y. Lespérance, (Eds.), *Intelligent Agents VI: Agent Theories, Architectures, and Languages ATAL-99*, volume 1757 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pp. 13–26, Heidelberg, 2000. Springer-Verlag.