

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

Igoris Belovas

RIBINĖS TEOREMOS DIRICHLĖ  $L$ -FUNKCIJOMS

Daktaro disertacijos santrauka  
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2003

Disertacija rengta 1999 - 2003 metais Matematikos ir informatikos institute.

**Mokslinis vadovas:**

prof. habil. dr. Antanas LAURINČIKAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

**Disertacija ginama Vilniaus Gedimino technikos universiteto ir Matematikos ir informatikos instituto matematikos mokslo krypties taryboje:**

**Pirmininkas:**

prof. habil. dr. Bronius GRIGELIONIS (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

**Nariai:**

prof. habil. dr. Raimondas ČIEGIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

prof. habil. dr. Eugenijus MANSTAVIČIUS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

prof. habil. dr. Leonas SAULIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

doc. dr. Ramūnas GARUNKŠTIS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

**Oponentai:**

prof. habil. dr. Feliksas IVANAUSKAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

dr. Rasa ŠLEŽEVIČIENĖ (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2004 m. sausio 23 d. ... val., Matematikos ir informatikos instituto 203 auditorijoje.

Adresas: Akademijos 4, LT-2021 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2003 m. gruodžio 22 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Matematikos ir informatikos instituto ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekose.

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

Igoris Belovas

LIMIT THEOREMS FOR DIRICHLET  $L$ -FUNCTIONS

Summary of Doctoral Dissertation  
Physical sciences, mathematics (01 P)

Vilnius, 2003

The scientific work was carried out in 1999 - 2003 at the Institute of Mathematics and Informatics.

**Scientific supervisor:**

Prof. Dr. Habil. Antanas LAURINČIKAS (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01 P)

**The council:**

Chairman:

Prof. Dr. Habil. Bronius GRIGELIONIS (Institute of Mathematics and Informatics, Physical sciences, Mathematics - 01 P)

Members:

Prof. Dr. Habil. Raimondas ČIEGIS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics - 01 P)

Prof. Dr. Habil. Eugenijus MANSTAVIČIUS (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01 P)

Prof. Dr. Habil. Leonas SAULIS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics - 01 P)

Assoc. Prof. Dr. Ramūnas GARUNKŠTIS (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01 P)

**Opponents:**

Prof. Dr. Habil. Feliksas IVANAUSKAS (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01 P)

Dr. Rasa ŠLEŽEVIČIENĖ (Šiauliai university, Physical sciences, Mathematics - 01 P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on January 23, 2004, in lecture room No. 203 at ... .

Address: Akademijos 4, LT-2021, Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on December 22, 2003.

The dissertation is available at the Library of Institute of Mathematics and Informatics and at the Library of Vilnius Gediminas Technical University

## DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

### Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Tyrimo objektas - Rymano dzeta funkcija ir Dirichlė  $L$ -funkcijos.  
Mokslinė problema - šių funkcijų tikimybiniai skirstiniai įvairiose erdvėse.

### Tiksai ir uždaviniai

Darbo tikslas - Rymano dzeta funkcijos ir Dirichlė  $L$ -funkcijų reikšmių pasiskirstymo statistinių aspektų tyrimas. Disertacinio darbo uždaviniai yra šie:

1. Esant teisingai Rymano hipotezei, įrodyti ribinę teoremą tikimybinų matų silpno konvergavimo prasme tolydžiųjų funkcijų erdvėje Rymano dzeta funkcijai arti kritinės tiesės ir identifikuoti joje ribinį matą.
2. Įrodyti ribinę teoremą kompleksinėje plokštumoje Dirichlė  $L$ -funkcijoms su išreikštiniu ribinio mato pavidalu.
3. Esant teisingai apibendrintajai Rymano hipotezei, įrodyti ribinę teoremą tolydžiųjų funkcijų erdvėje Dirichlė  $L$ -funkcijoms ir identifikuoti joje ribinį matą.

### Aktualumas

Dzeta funkcijos yra pagrindinis įrankis analizinėje skaičių teorijoje. Daugelio skaičių teorijos uždavinių sprendimas tiesiogiai priklauso nuo šių funkcijų savybių. Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcija ir Dirichlė  $L$ -funkcijos yra reikalingos nagrinėjant pirminių skaičių pasiskirstymą natūraliųjų skaičių sekoje bei aritmetinėse progresijose. Todėl šių funkcijų tyrinėjimai užima svarbią vietą daugelio žinomų matematikų darbuose. Pakanka paminėti F. V. Atkinsono (F. V. Atkinson), H. Boro (H. Bohr), E. Bombieri, G.H. Hardžio (G.H. Hardy), M. N. Hakslio (M. N. Huxley), A. E. Ingamo (A. E. Ingham), A. Ivičio (A. Ivič), H. Ivanieco (H. Iwaniec), M. Jutilos, A. Laurinčiko, N. Levinsono (N. Levinson), J. E. Litlvudo (J. E. Littlewood), K. Macumoto (K. Matsumoto), H. L. Montgomerio (H. L. Montgomery), Y. Motokaši (Y. Motokashi), P. Sarnako (P. Sarnak), A. Selbergo (A. Selberg), E. C. Titčmaršo (E. C. Titchmarsh), S. M. Voronino (S. M. Voronin) vardus. Tačiau dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas yra labai sudėtingas, sunku pasakyti ką nors apie jų konkrečias reikšmes, ir daugelis uždavinių lieka neišspręsti iki šiol. Kadangi dzeta funkcijų konkrečių reikšmių problema yra sunkiai sprendžiama, jų reikšmių pasiskirstymo tyrimuose buvo pradėti taikyti tikimybiniai metodai. Pirmuosius tokio tipo rezultatus 1930-1932 m.

gavo H. Boras ir B. Jesenas (B. Jessen) Jie įrodė ribines teoremas Rymano dzeta funkcijai. H. Boro ir B. Jeseno darbus tęsė A. Vintneris (A. Wintner), A. Selbergas, B. Bagčis (B. Bagchi), P. D. T. A. Eliotas (P. D. T. A. Elliott), A. Gošas (A. Ghosh), D. Džoineris (D. Joyner), J. Kubilius, A. Laurinčikas, K. Macumoto, E. Stankus ir kiti. Tačiau vis dar lieka neišspręstų problemų, ypač nagrinėjant sudėtingas funkcines erdves, pavyzdžiui, tolydžiųjų funkcijų erdvę. Šiai erdvei nėra sukurta ribinių tikimybinių skirstinių egzistavimo teorija, todėl ir dzeta funkcijų ribinės teoremos šioje erdvėje žengia pirmuosius žingsnius. Todėl buvo svarbu išspręsti ir patikslinti žinomus rezultatus Rymano dzeta funkcijai ir įrodyti ribines teoremas tolydžiųjų funkcijų erdvėje Dirichlė  $L$ -funkcijoms.

### **Tyrimų metodika**

Kadangi tyrimo objektas priklauso analizinei skaičių teorijai, o rezultatai yra formuluojami tikimybinių ribinių teoremų pavidalu, tai tyrimų metodika remiasi analiziniais ir tikimybiniais metodais. Yra naudojamas konturinis integravimas, silpno tikimybinių matų konvergavimo savybės, ergodinė teorija, aproksimavimas vidurkiu, nagrinėjamų funkcijų artiniai baigtinėmis sumomis.

### **Naujumas ir praktinė vertė**

Visi disertacinio darbo rezultatai yra nauji. Ribinė teorema Rymano dzeta funkcijai tolydžiųjų funkcijų erdvėje yra įrodyta arčiau kritinės tiesės, nei ankstesnės teoremos, be to, yra aprašytas ribinis dėsnis. Analogiška problema Dirichlė  $L$ -funkcijoms nagrinėjama išvis pirmą kartą. Ribinės teoremos Dirichlė  $L$ -funkcijoms kompleksinėje plokštumoje su nurodytu išreikštiniu ribinio mato pavidalu iki šiol nebuvo žinomos.

Gauti rezultatai yra grynai teoriniai. Jie gali būti panauduoti dzeta funkcijų teorijos tolimesniam vystymui, pavyzdžiui, naujų ribinių teoremų Rymano dzeta funkcijai ir Dirichlė  $L$ -funkcijoms tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme įrodymui, bei šių funkcijų aproksimavimo savybių tyrimui.

### **Darbo struktūra**

Disertacinis darbas parašytas anglų kalba. Disertaciją sudaro įvadas, 3 skyriai, išvados, literatūros ir mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašai, žymenys, 6 brėžiniai. Bendra darbo apimtis 91 puslapis.

### **Svarbiausi rezultatai**

Priminsime Rymano dzeta funkcijos ir Dirichlė  $L$ -funkcijų apibrėžimus. Tegul  $\sigma + it$  yra kompleksinis kintamasis. Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje  $\sigma > 1$  yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Iš čia išplaukia, kad funkcija  $\zeta(s)$  yra reguliari srityje  $\sigma > 1$ . Žinoma, kad  $\zeta(s)$  yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką  $s = 1$ , kuriame ji turi paprastą polių su reziduumu 1.

L. Euleris (L. Euler) pirmasis pradėjo nagrinėti funkciją  $\zeta(s)$ . Realiems  $s > 1$  jis įrodė tapatybę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

taip pat parodė, kad

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} B_n, n = 1, 2, \dots$$

Čia  $B_m$  yra Bernulio skaičiai, apibrėžiami lygybe

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!} z^m.$$

1859 m. B. Rymanas (B. Riemann) pradėjo nagrinėti  $\zeta(s)$  kaip kompleksinio kintamojo  $s$  funkciją ir pritaikė ją pirminių skaičių pasiskirstymo problemos sprendimui. Be to, B. Rymanas gavo funkcijos  $\zeta(s)$  analizinį pratęsimą, įrodė funkcinę lygtį

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

teisingą visiems  $s \in \mathbb{C}$ , ir išklė kelias hipotezes apie  $\zeta(s)$  nulių pasiskirstymą. Kai kurios iš jų buvo vėliau įrodytos J. Adamaro (J. Hadamard), Š. de la Valė Puseno (Ch. de la Vallée Poussin) ir H. Mangoldto (H. von Mangoldt) pastangomis. Tačiau, viena hipotezė, vadinama Rymano hipoteze ir teigianti, jog visi netrivialūs  $\zeta(s)$  nuliai yra

kritinėje tiesėje  $\sigma = \frac{1}{2}$ , nepaisant daugelio matematikų pastangų, lieka nei paneigta, nei įrodyta iki šiol.

Analogiškai funkcijai  $\zeta(s)$ , Dirichlė  $L$ -funkcijos yra analizinis įrankis pirminių skaičių aritmetinėse progresijose pasiskirstymo tyrimui. Jas 1834 m. apibrėžė L. Dirichlė (L. Dirichlet). Dirichlė  $L$ -funkcijų apibrėžime naudojami Dirichlė charakteriai, kurių apibrėžimas gana ilgas ir sudėtingas, todėl mes tik priminsime, jog bet kuri periodinė su periodu  $d$  pilnai multiplikatyvi aritmetinė funkcija  $g(m)$ ,  $g(m) \not\equiv 0$  ir  $g(m) = 0$ , kai  $(m, d) > 1$ , sutampa su vienu iš Dirichlė charakterių moduliu  $d$ . Yra tiksliai  $\varphi(d)$  charakterių mod  $d$ . Čia  $\varphi(d)$  yra Eulerio funkcija

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Dirichlė charakteris  $\chi_0(n)$  mod  $d$  yra vadinamas pagrindiniu, jei  $\chi_0(n) = 1$  visiems  $n$ ,  $(n, d) = 1$ .

Dirichlė  $L$ -funkcijos pusplokštumėje  $\sigma > 1$  yra apibrėžiamos eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Joms yra teisinga Eulerio tapatybė

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1.$$

Kai  $\chi \neq \chi_0$ , funkcijos  $L(s, \chi)$  yra reguliarios visoje kompleksinėje plokštumoje, o, kai  $\chi = \chi_0$ ,

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Apibendrintoji Rymano hipotezė tvirtina, kad visi netrivialūs  $L(s, \chi)$  nuliai yra kritinėje tiesėje  $\sigma = \frac{1}{2}$ .

Kaip minėjome, H. Boras dzeta funkcijų reikšmių tyrimui pasiūlė taikyti statistinius metodus. Jo ideja buvo gana paprasta. Jeigu turime kurią nors aibę, tai galime nagrinėti, kaip dažnai duotos funkcijos reikšmės patenka į tą aibę. Pasirodo, jog šis dažnis paklūsta griežtiems matematiniais dėsniais. Savo pasiūlymą H. Boras realizavo funkcijai  $\zeta(s)$  kartu su B. Jesenu.

Tegul  $R$  yra uždaras stačiakampis kompleksinėje plokštumoje ir tegul  $L(T, R)$  yra aibės

$$\{t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in R\}.$$

Žordano matas.

**A teorema** (H. Boras, B. Jesenas, 1930). Tegul  $\sigma > 1$ . Tada egzistuoja riba

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, R)}{T} = W(R, \sigma),$$

priklausanti tik nuo  $\sigma$  ir  $R$ .

Atvėjis  $\sigma > 1/2$  yra sudėtingesnis. Tegul

$$G = \left\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\right\} \setminus \bigcup_{s_j = \sigma_j + it_j} \left\{s = \sigma + it_j : \frac{1}{2} < \sigma < \sigma_j\right\}.$$

Čia  $s_j$  perbėga visus galimus funkcijos  $\zeta(s)$  nulius juostoje  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ . Tegul  $L_1(T, R)$  yra aibės

$$\{t \in [0, T] : \sigma + it \in G, \log \zeta(\sigma + it) \in R\}$$

Žordano matas. Tuomet turime tokį tvirtinimą.

**B teorema** (H. Boras, B. Jesenas, 1932). Tegul  $\sigma > 1/2$ . Tuomet egzistuoja riba

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L_1(T, R)}{T} = W_1(R, \sigma),$$

kuri priklauso tik nuo  $\sigma$  ir  $R$ .

A ir B teoremų įrodymas remiasi sudėtinga B. Jeseno sukurta iškilų kreivių sumų teorija. Šiuo metu tokie uždaviniai sprendžiami taikant

B. Bagčio ir A. Laurinčiko sukurta tikimybinį metodą. Gauti rezultatai paprastai formuluojami ribinių teoremų tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme pavidalu.

Tikimybinių matų silpno konvergavimo teorijos pagrindai buvo padėti 20 a. trečiame dešimtmetyje A.N. Kolmogorovo (A.N. Kolmogorov), P. Erdiošo (P. Erdős), M. Kaco (M. Kac), J. M. Dubo (J. M. Doob), M. Donskerio (M. Donsker) darbais. Vėliau teoriją vystė A. V. Skorochodas (A.V. Skorokhod), L. Le Kamas (L. Le Cam), Ju. V. Prochorovas (Ju. V. Prokhorov), V.S. Varadarajanas (V.S. Varadarajan) ir kiti matematikai.

Tegul  $\mathcal{B}(S)$  yra erdvės  $S$  Borelio aibių klasė, o  $P_n$  ir  $P$  yra tikimybiniai matai erdvėje  $(S, \mathcal{B}(S))$ . Sakysime, jog  $P_n$  silpnai konverguoja į  $P$ , kai  $n \rightarrow \infty$ , jei

$$\int_S f dP_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S f dP$$

visoms realioms, aprėztoms, tolydžioms funkcijoms  $f$ , apibrėztoms erdvėje  $S$ .

Tegul  $T > 0$  ir

$$\nu_T^t(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas} \{t \in [0, T] : \dots\}.$$

Čia  $\text{meas}\{A\}$  yra aibės  $A$  Lebegeo matas, o vietoj daugtaškio yra rašoma sąlyga, kurią tenkina  $t$ .

Pateiksime A teoremos formulavimą tikimybinių matų silpno konvergavimo teorijos terminais.

**C teorema** (A. Laurinčikas, 1996). Tegul  $\sigma > \frac{1}{2}$  yra fiksuotas skaičius. Tada erdvėje  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$  egzistuoja toks tikimybinis matas  $P_\sigma$ , kad matas

$$\nu_T^t(\zeta(\sigma + it) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į  $P_\sigma$ .

Atvejis  $\sigma = \frac{1}{2}$  arba  $\sigma = \sigma_T \rightarrow \frac{1}{2} + 0$ , kai  $T \rightarrow \infty$ , yra sudėtingesnis. 1985 m. A. Laurinčikas parodė, kad šiuo atveju pasiskirstymo funkcija

$$\nu_T^t(|\zeta(\sigma + it)| < x),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , nekonverguoja į jokią pasiskirstymo funkciją. Pasirodo, kad šiuo atveju yra būtinas laipsninis normavimas.

Pateiksime vieną rezultatą funkcijai  $|\zeta(s)|$ . Tegul  $l_T \rightarrow \infty$ , kai  $T \rightarrow \infty$ , ir

$$\sigma_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T}.$$

Be to,

$$\kappa_T = \begin{cases} (2^{-1} \log l_T)^{-\frac{1}{2}}, & \text{kai } l_T \leq \log T, \\ (2^{-1} \log \log l_T)^{-\frac{1}{2}}, & \text{kai } l_T > \log T, \end{cases}$$

ir

$$G(x) = \begin{cases} \Phi(\log x), & \text{kai } x > 0, \\ 0, & \text{kai } x \leq 0. \end{cases}$$

Čia  $\Phi(x)$  yra standartinio normalaus pasiskirstymo dėsnio pasiskirstymo funkcija, t.y.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

**D teorema** (*A. Laurinčikas, 1988*) *Pasiskirstymo funkcija*

$$\nu_T^t(|\zeta(\sigma_T + it)|^{\kappa_T} < x),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , pataškiai konverguoja į pasiskirstymo funkciją  $G(x)$ .

Panašus rezultatas galioja Rymano dzeta funkcijos argumentui. Tegul

$$\hat{G}(x) = \begin{cases} 2\Phi(x) - 1, & \text{kai } x > 0, \\ 0, & \text{kai } x \leq 0, \end{cases}$$

ir

$$\hat{k}_T = \begin{cases} (2^{-1} \log l_T)^{\frac{1}{2}}, & \text{kai } l_T \leq \log T, \\ (2^{-1} \log \log l_T)^{\frac{1}{2}}, & \text{kai } l_T > \log T. \end{cases}$$

**E teorema** (A. Gošas, 1983) *Pasiskirstymo funkcija*

$$\nu_T^t \left( \frac{|\arg \zeta(\sigma_T + it)|}{\hat{k}_T} < x \right),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , pataškiui konverguoja į pasiskirstymo funkciją  $\hat{G}(x)$ .

Analogiškas rezultatas teisingas ir tikimybiniam matui

$$\nu_T^t(\zeta^{\kappa_T}(\sigma_T + it) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

B. Bagčis pirmas pradėjo nagrinėti ribines teoremas Rymano dzeta funkcijai funkcinėse erdvėse. Tegul  $G \in \mathbb{C}$  yra sritis kompleksinėje plokštumoje, o  $H(G)$  yra analizinių srityje  $G$  funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Tegul  $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$  yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega = \prod_p \gamma_p.$$

Čia  $\gamma_p = \gamma$  visiems pirminiams  $p$ . Toras  $\Omega$  su sandaugos topologija ir pataškine daugyba yra kompaktiška topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  egzistuoja tikimybinis Haro matas  $m_H$ . Gauname tikimybinę erdvę  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ . Tegul  $\omega(p)$  yra elemento  $\omega \in \Omega$  projekcija į koordinatinę erdvę  $\gamma_p$ . Tuomet  $\{\omega(p)\}$  yra nepriklausomų kompleksinių atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ , seka. Tegul

$$\zeta(s, \omega) = \prod_p \left( 1 - \frac{\omega(p)}{p^s} \right)^{-1}, \quad \omega \in \Omega.$$

Galima parodyti, kad pastaroji sandauga beveik visiems  $\omega \in \Omega$  konverguoja tolygiai kompaktiškuose pusplokštumės  $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1/2\}$  poaibiuose. Taigi,  $\zeta(s, \omega)$  yra  $H(D)$ -reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ .

Tegul  $P_\zeta$  yra elemento  $\zeta(s, \omega)$  skirstinys, t.y.

$$P_\zeta(A) = m_H(\omega \in \Omega : \zeta(s, \omega) \in A), \quad A \in (\mathcal{B}(H(D))).$$

**F teorema** (A. Laurinčikas, 1996) Tegul  $D_1 = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ ,  $D_2 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ , ir tegul  $P_{j, \zeta}$  yra  $P_\zeta$  siaurinsys erdvėje  $(H(D_j), \mathcal{B}(H(D_j)))$ ,  $j = 1, 2$ . Tada tikimybiniis matas

$$\nu_T^\tau(\zeta(s + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_j)),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į  $P_{j, \zeta}$ ,  $j = 1, 2$ .

Pastebime, jog F teorema su  $j = 1$  yra naudojama funkcijos  $\zeta(s)$  universalumo įrodymui.

Rymano dzeta funkcija yra meromorfinė. Todėl jos reikšmių pasiskirstymą geriau atspindi ribinės teoremos meromorfinių funkcijų erdvėje. Tegul  $M(D)$  yra meromorfinių srityje  $D$  funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija.

**E teorema** (B. Bagčis, 1981) Tikimybiniis matas

$$\nu_T^\tau(\zeta(s + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į  $P_\zeta$ .

1981 m. B. Bagčis iškėlė problemą: ar matas

$$\nu_T^\tau\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + it + i\tau\right) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R})),$$

silpnai konverguoja į kokį nors matą erdvėje  $(C(\mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R})))$ ? Čia  $C(\mathbb{R})$  yra tolydžiųjų funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Atsakymas yra neigiamas. Tai įrodė A. Laurinčikas 1985 m. Buvo gauta tokia B. Bagčio problemos modifikacija. Tegul  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  yra Rymano sfera su sferine metrika  $d(s_1, s_2)$ :

$$d(s_1, s_2) = \frac{2|s_1 - s_2|}{\sqrt{1 + |s_1|^2} \sqrt{1 + |s_2|^2}},$$

$$d(s, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |s|^2}},$$

$$d(\infty, \infty) = 0.$$

Čia  $s, s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ . Ši metrika yra suderinama su  $\mathbb{C}_\infty$  topologija. Tegul  $C(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R}, \mathbb{C}_\infty)$  yra tolydžiųjų funkcijų  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Šioje topologijoje seka  $\{f_n, f_n \in C(\mathbb{R})\}$  konverguoja į funkciją  $f \in C(\mathbb{R})$ , jei

$$d(f_n(t), f(t)) \rightarrow 0,$$

kai  $n \rightarrow \infty$ , tolygiai pagal  $t$  kompaktiškuose erdvės  $\mathbb{R}$  poaibiuose.

Tegul  $l_T > 0$ , kai  $T \rightarrow \infty$ ,  $l_T$  monotoniškai tolsta į begalybę,  $l_T \leq \log T$ , ir visiems  $U > 0$ , kai  $T \rightarrow \infty$ ,

$$l_{T+U} - l_T = \frac{BU}{T}.$$

Čia  $B$  yra dydis, moduliui aprėžtas konstanta.

**H teorema** (*A. Laurinčikas, 1996*) Tegul

$$\sigma_T = \frac{1}{2} + \frac{\log^2 l_T}{l_T}, \quad \kappa_T = (2^{-1} \log l_T)^{-1/2},$$

ir teisinga Rymano hipotezė. Tuomet erdvėje  $(C(\mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R})))$  egzistuoja toks tikimybinis matas  $P$ , kad matas

$$\nu_T^\tau(\zeta^{\kappa_T}(\sigma_T + it + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R})),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į  $P$ .

Šioje teoremoje mažiausias atstumas iki kritinės tiesės yra lygus  $(\log \log T)^2 (\log T)^{-1}$ .

Disertaciniame darbe įrodoma ribinė teorema Rymano dzeta funkcijai tolydžiųjų funkcijų erdvėje, kai  $\sigma_T$  yra dar arčiau kritinės tiesės negu H teoremoje. Be to, ribinis matas yra tiksliau nusakomas.

Tegul  $d_a(m)$  yra  $\zeta^a(s)$  skleidinio pusplokštumėje  $\sigma > 1$  Dirichlė eilutė koeficientai, o

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \parallel m} \omega^\alpha(p), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Čia  $p^\alpha \parallel m$  reiškia, jog  $p^\alpha | m$ , bet  $p^{\alpha+1} \nmid m$ . Tai duoda funkcijos  $\omega(p)$  pratęsimą į visą natūraliųjų skaičių aibę.

Tegul

$$\kappa_T = (\sqrt{2^{-1} \log \log T})^{-1}.$$

Įrodoma, kad

$$\sum_{m \leq T} \frac{d_{\kappa_T}(m) \omega(m)}{m^{\sigma_T + it}},$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , beveik visiems  $\omega \in \Omega$  konverguoja tolygiai pagal  $t$  kompaktiškuose erdvės  $\mathbb{R}$  poaibiuose į ribinę funkciją, tarkime,  $\beta(t, \omega)$ . Todėl funkcija  $\beta(t, \omega)$  yra  $C(\mathbb{R})$ -reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ . Tegul  $P_\beta$  yra šio elemento skirstinys, t.y.

$$P_\beta(A) = m_H(\omega \in \Omega : \beta(t, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R})).$$

Pagrindinis 1 skyriaus rezultatas yra toks tvirtinimas

**1.1.1 teorema.** *Tegul  $\theta > \sqrt{2}/2$  yra fiksuotas skaičius,  $\kappa_T = (\sqrt{2^{-1} \log \log T})^{-1}$ ,  $\sigma_T = 1/2 + \theta(\log \log T)^{3/2}(\log T)^{-1}$  ir teisinga Rymano hipotezė. Tada tikimybinis matas*

$$\nu_T^\tau(\zeta^{\kappa_T}(\sigma_T + it + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R})),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į  $P_\beta$ .

1.1.1 teoremos įrodymo schema yra tokia. Pirmiausia yra įrodoma, jog  $\beta(t, \omega)$  yra atsitiktinis elementas. Paskui įrodoma ribinė teorema augančio ilgio Dirichlė polinomui, ir pagaliau pereinama prie funkcijos  $\zeta(s)$ .

Dirichlė  $L$ -funkcijoms tikimybiniai rezultatai nėra tokie gausūs, kaip kad Rymano dzeta funkcijai. 1996 m. A. Laurinčikas pritaikė charakteristinių transformacijų metodą ribinės teoremos Dirichlė  $L$ -funkcijoms kompleksinėje plokštumoje įrodymui.

**I teorema** (A. Laurinčikas, 1996) Tegul  $\sigma > 1/2$  yra fiksuotas skaičius. Tuomet erdvėje  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$  egzistuoja toks tikimybinis matas  $P_{\sigma, \chi}$ , kad matas

$$\nu_T^t(L(\sigma + it, \chi) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į  $P_{\sigma, \chi}$ .

Be to, yra žinoma ribinė teorema arti kritinės tiesės Dirichlė  $L$ -funkcijų moduliui. Tegul, kaip anksčiau,

$$\sigma_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_T},$$

o  $l_T \rightarrow \infty$ , kai  $T \rightarrow \infty$ .

**J teorema** (A. Laurinčikas, 1996) Tegul  $l_T = o(\log T (\log T \log T)^{-1})$ . Tuomet pasiskirstymo funkcija

$$\nu_T^t(|L(\sigma_T + it, \chi)|^{\frac{1}{\sqrt{2^{-1} \log l_T}}} < x)$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , pataškiai konverguoja į  $G(x)$ .

Visos minėtos teoremos apie  $L$ -funkcijas yra gautos fiksuotam charakterio moduliui. Tačiau yra galimos ir kitokio pobūdžio ribinės teoremos, kurios charakterizuoja  $L$ -funkcijų elgesį, kai charakterio modulis didėja. Tokios teoremos yra žinomos tik pirminiams moduliams.

Tegul  $Q \geq 2$ ,

$$M_Q = \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\text{mod } p) \\ \chi \neq \chi_0}} 1,$$

$$\mu_Q(\dots) = M_Q^{-1} \sum_{p \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi(\text{mod } p) \\ \chi \neq \chi_0, \dots}} 1,$$

o vietoj daugtaškio įrašoma sąlyga, kurią tenkina pora  $(p, \chi(\text{mod } p))$ . Be to, tegul

$$\eta = \eta(\tau, k) = \frac{i\tau + k}{2}, \quad \tau \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

ir

$$c_{k,\tau}(p^\alpha) = \frac{\eta(\eta+1)\dots(\eta+\alpha-1)}{\alpha!}.$$

Tegul  $P$  yra tikimybinis matas erdvėje  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ , kurio charakteringoji transformacija yra

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{k,\tau}(m) c_{-k,\tau}(m) m^{-2\sigma}, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

**K teorema** (*E. Stankus (1975)*) Tegul  $\sigma > 1/2$ . Tuomet tikimybinis matas

$$M_Q(L(s, \chi) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai  $Q \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į  $P$ .

I teoremoje yra svarbu identifikuoti ribinį matą. Disertacijoje pirmiausia pateikiamas kitoks I teoremos įrodymas, besiremiantis charakteringųjų funkcijų metodu, po to yra identifikuojamas ribinis matas.

Erdvėje  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$  apibrėžiame kompleksinį atsitiktinį elementą

$$L(\sigma, \chi, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)\omega(m)}{m^\sigma}$$

Tuomet pagrindinis 2 skyriaus rezultatas yra toks tvirtinimas

**2.2.1 teorema** Tegul  $\sigma > 1/2$ . Tuomet tikimybinis matas

$$P_T(A) = \nu_T^t(L(\sigma + it, \chi) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento  $L(\sigma, \chi, \omega)$  skirstinį.

Paskutiniame disertacijos skyriuje įrodoma ribinė teorema Dirichlé  $L$ -funkcijoms tolydžiųjų funkcijų erdvėje. Pirmoje skyriaus dalyje gaunami kai kurie  $L$ -funkcijų įverčiai ir artiniai baigtine suma.

Tegul  $\kappa_T$  and  $\sigma_T$  yra tie patys dydžiai kaip ir 1.1.1 teoremoje, o  $n_T = T^{\kappa_T/2}$ . Apibrėžiame

$$S_u(s, \chi) = \sum_{m \leq u} \frac{d_{\kappa_T}(m) \chi(m)}{m^s}$$

ir

$$g(s, \chi) = L^{\kappa_T}(s, \chi) - S_{n_T}(s, \chi).$$

Tuomet turime tokį įvertį.

**3.1.1 teorema** Tegul  $\varepsilon_T = (\log T)^{-1}$ , o  $K$  yra kompaktiškas erdvės  $\mathbb{R}$  poaibis ir yra teisinga apibendrintoji Rymano hipotezė. Tuomet, kai  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\nu_T^\tau(\sup_{t \in K} (|g((\sigma_T + it + i\tau), \chi)| \geq \varepsilon_T) = o(1).$$

Pastaroji teorema yra naudojama ribinės teoremos  $L$ -funkcijoms tolydžių funkcijų erdvėje įrodymui. Pirmiausia įrodoma, jog beveik visiems  $\omega \in \Omega$

$$\sum_{m \leq T} \frac{d_{\kappa_T}(m) \omega(m) \chi(m)}{m^{\sigma_T + it}},$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , konverguoja tolygiai pagal  $t$  kompaktiškuose  $\mathbb{R}$  poaibiuose į funkciją  $\beta(t, \chi, \omega)$ . Taigi,  $\beta(t, \chi, \omega)$  yra  $C(\mathbb{R})$ -reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje  $(\Omega, B(\Omega), m_H)$ . Tegul  $P_{\beta, \chi}$  yra jo skirstinys.

**3.2.1 teorema** Tegul yra teisinga apibendrintoji Rymano hipotezė. Tuomet tikimybinis matas

$$\nu_T^\tau(L^{\kappa_T}(\sigma_T + it + i\tau, \chi) \in A), A \in B(C(\mathbb{R})),$$

kai  $T \rightarrow \infty$ , silpnai konverguoja į  $P_{\beta, \chi}$ .

## Išvados

1. Nustatyta, kad esant teisingai Rymano hipotezei, Rymano dzeta funkcijai šalia kritinės tiesės galioja ribinė teorema silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme tolydžiųjų funkcijų erdvėje su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Ribinis matas šioje teoremoje sutampa su vieno atsitiktinio elemento skirstiniu.

2. Dirichlė  $L$ -funkcijoms pusplokštumėje  $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1/2\}$  galioja ribinė teorema kompleksinėje plokštumoje. Šiuo atveju ribinis matas yra atsitiktinio elemento, apibrėžiamo begaline eilute, skirstinys.

3. Kai patenkinta išplėstinė Rymano hipotezė, Dirichlė  $L$ -funkcijoms šalia kritinės tiesės teisinga ribinė teorema tolydžiųjų funkcijų erdvėje. Ribinis matas joje yra vienos atsitiktinių elementų sekos ribos skirstinys.

## Publikacijų sąrašas

1. I. Belov, A Limit theorem for the Riemann zeta-function in the space of continuous functions, *Lietuvos matematikos rinkinys*, **21**, spec. nr., (2001), 45–52.

2. I. Belov, On some estimates for Dirichlet  $L$ -functions, in: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proceedings of the Third International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 24-28 September 2001. Ed. A. Dubickas, A. Laurinčikas, E. Manstavičius, (2002), 11–19.

3. I. Belov, Limit theorem for Dirichlet  $L$ -functions, *Lietuvos matematikos rinkinys*, **43**(1), (2003), 1–12 (rusų kalba)

4. I. Belov, Limit theorem for Dirichlet  $L$ -functions on the complex plane, *Chebyshevskij sbornik*, **4**, 2(6), (2003), 122–133.

5. I. Belov, Limit theorem for Dirichlet  $L$ -functions on the complex plane, *V International Conference "Algebra and Number theory: Modern Problems and Applications"*, Abstracts, Russia, Tula, May 19-24, (2003), 262–263.

6. I. Belov, A Laurinčikas, On limit distribution of the Riemann zeta-function in the space of continuous functions, Vilnius University, Department of Math. and Inform., *Preprint 2001-13*, 2001 (atiduota į *"Journal of Number Theory"*).

7. I. Belov, A Limit theorem for Dirichlet  $L$ -functions. *Abstracts of Communications. VIII International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, June 23-29, 2002.

## Aprobacija

Darbo tematika yra perskaityti 6 pranešimai, iš kurių 3 respublikinėse ir 3 tarptautinėse konferencijose.

1. Ribinė teorema Rymano dzeta funkcijai tolydžių funkcijų erdvėje. XLII Lietuvos matematikų draugijos konferencija, Klaipėda, 22-23. 06. 2001
2. A limit theorem for Dirichlet  $L$ -functions in the space of continuous functions. Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. Third International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 24-28 September 2001
3. Ribinė teorema Dirichlė  $L$ -funkcijoms. XLIII Lietuvos matematikų draugijos konferencija, Vilnius, 21-22. 06. 2002
4. Limit theorem for Dirichlet  $L$ -functions. VIII International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, 23-29. 06. 2002
5. Limit theorem for Dirichlet  $L$ -functions on the complex plane. V International Conference "Algebra and Number Theory: Modern Problems and Applications", Tula, 2003 May 19-24
6. Ribinė teorema Dirichlė  $L$ -funkcijoms kompleksinėje plokštumoje. XLIV Lietuvos matematikų draugijos konferencija, Vilnius, 19-20. 06. 2003

Be to, buvo perskaityti pranešimai Matematikos ir informatikos instituto doktorantų konferencijose ir seminaruose, Vilniaus universiteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos bei Kompiuterijos katedrų seminaruose, Vilniaus Gedimino technikos universiteto Matematinio modeliavimo katedros seminare.

Dėkoju moksliniam vadovui Prof. A. Laurinčikui už paramą ruošiant disertaciją. Dėkoju doktorantūros studijų komiteto nariams Prof. B. Grigelioniui, Prof. H. Pragarauskiui, Prof. V. Kaminskui ir doc. R. Garunkščiui bei Vilniaus universiteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros, Matematikos ir informatikos instituto matematikams.

## Summary

The thesis is devoted to limit theorems in the sense of the weak convergence of probability measures for the Riemann zeta-function

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re s > 1,$$

and for Dirichlet  $L$ -functions

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1.$$

Here  $\chi$  denotes the Dirichlet character mod  $d$ .

The idea of application of probability methods in the investigations of value distribution of zeta-functions comes back to H. Bohr. Jointly with B. Jessen he proved first limit theorems for the Riemann zeta-function. Later, their investigations were continued by A. Selberg, A. Ghosh, B. Bagchi, K. Matsumoto, A. Laurinćikas, R. Garunkštis and others.

The thesis consists of the introduction, 3 chapters, conclusions, bibliography and list of publications on the subject of the thesis.

In Chapter 1 a limit theorem in the space of continuous functions for the Riemann zeta-function near the critical line is obtained. For this the Riemann hypothesis is used. The limit measure is discussed.

Chapter 2 is devoted to limit theorem on the complex plane for Dirichlet  $L$ -functions. The limit measure is identified.

In Chapter 3 a limit theorem in the space of continuous functions for Dirichlet  $L$ -functions near the critical line is proved. The limit measure in this theorem coincides with distribution of some random element.

For the investigation analytic, probabilistic and topological methods are applied.

## **Trumpos žinios apie autorių**

### **Gimimo data ir vieta:**

1975 m. gruodžio 6 d., Vilnius

### **Išsilavinimas ir kvalifikacija:**

1992 m. baigė Vilniaus tikslųjų, gamtos ir techninių mokslų licėjų.

1999 m. baigė Vilniaus universiteto Matematikos fakultetą, įgyjo magistro kvalifikacinį laipsnį.

1999-2003 m. studijavo Matematikos ir informatikos instituto doktorantūroje.

### **Darbo patirtis:**

1996-1997 m. dirbo Kultūros ministerijos Kultūros paveldo centro kompiuterinės informacinės sistemos vyr. administratoriumi.

1998-1999 m. dirbo Matematikos ir informatikos institute matematiku-programuotoju.