1. Analizinės skaičių teorijos modulis

Pagrindimas

Skaičių teorija yra klasikinė matematikos dalis. Ji išsiskiria savo uždavinių gražumu ir jų formulavimo paprastumu. Daugelis problemų turi senas tradicijas ir tampa iššūkiu vis naujoms matematikų kartoms. Štai neseniai įrodyta paskutinioji Ferma teorema buvo atakuojama beveik 400 metų, ją įrodinėjant atsirado naujos matematikos šakos. Jau pusantro šimtmečio nepasiduoda garsioji Rymano hipotezė apie dzeta funkcijos nulių išsidėstymą. Ši, iš analizinės skaičių teorijos, kilusi problema priskirta prie svarbiausiųjų XXI a. matematikos problemų ir yra įvertinta milijono dolerių premija. Apskritai skaičių teorija yra bene labiausiai matematikos pasaulyje vertinama šaka. Tai liudija ir aukščiausias matematikų darbo įvertinimo matas - Fyldso premijos ir medaliai: didesnioji jų dalis buvo įteikti už skaičių teorijos pasiekimus. Pirmoji Abelio premija (Nobelio premijos ekvivalentas matematikams) irgi paskirta skaičių teorijos atstovui Fyldso premijos laureatui prancūzų matematikui J.-P. Serui (Serre). Reikia pastebėti, kad skaičių teorija nėra vien gryna teorinė matematikos šaka, jos rezultatai yra plačiai taikomi kodavimo teorijoje, kriptografijoje, informatikoje, net kvantinėje mechanikoje ir kitur.

Pagrindinė šio modulio tyrimo objektas yra dzeta funkcijos.

Tegu $s=\sigma+it$ yra kompleksinis kintamasis. Kai $\sigma>1$, Rymano dzeta funkcija apibrėžiama Dirichlet eilute arba Euler'io sandauga pagal pirminius skaičius:

$$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s=1$, kuriame ji turi paprastąjį polių. Ši funkcija yra svarbus ir įdomus skaičių teorijos objektas, labiausiai žinomas dėl sąryšio su pirminių skaičių savybėmis. Pirminiai skaičiai gražūs savo chaotiškumu ir tuo, kad tas chaosas paklūsta dėsniams. Chaotiškumo lygį nusako Rymano dzeta funkcijos kompleksinių nulių išsidėstymas. Jei pirminių skaičių, neviršijančių x, kiekį pažymėsime $\pi(x)$, tai

$$\pi(x)-\int_2^x\frac{du}{\log u}=O(x^{\theta+\varepsilon}) \quad \Leftrightarrow \quad \varsigma(s)\neq 0 \;\text{ kai }\; \sigma>\theta.$$

Rymano hipotezė (RH), viena iš garsiausių matematikos hipotezių, skelbia, kad $\zeta(s)\neq 0$ kai $\sigma>1/2$. Ekvivalentus formulavimas: visi $\zeta(s)$ kompleksiniai nuliai guli tiesėje $\sigma=1/2$. Yra žinoma, kad $\zeta(s)$ turi nulių kritinėje tiesėje $\sigma=1/2$ todėl RH teisingumas reiškia įmanomai „tvarkingiausią“ pirminių skaičių pasiskirstymą.

Pačios Rymano dzeta funkcijos reikšmės irgi yra pasiskirsčiusios labai įvairiai. S.M. Voronin'o universalumo teorema tvirtina, kad bet kurią nevirstančią nuliu analizinę funkciją galima aproksimuoti Rymano dzeta funkcijos tam tikrais postūmiais. Jei pavyktų įrodyti, kad $\zeta(s)$ gali pakankamai dažnai aproksimuoti pati save kritinėje juostoje, iš to išplauktų RH.

Universalumas yra susijęs su Rymano dzeta funkcijos augimu kritinėje juostoje. Informacija apie $\zeta(s)$ augimą svarbi daugeliui skaičių teorijos problemų. Čia susiduriame su kita dzeta funkcijų teorijoje gerai žinoma Lindelof'o hipoteze:

kiekvienam $\varepsilon > 0$, $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(t^{\varepsilon}).$

Rymano dzeta funkcijos tyrimai paskatino ištisų dzeta funkcijų klasių atsiradimą, turint vilties, kad platesnis požiūris, „žvilgsnis iš viršaus“, padės suprasti pačios $\zeta(s)$ savybes. Bendriausia prasme pavadinimas *dzeta funkcija* reiškia funkciją, kurioje nors srityje išreiškiamą Dirichlet eilute

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\beta_n).$$

Grubiai kalbant, visas dzeta funkcijas galima suskirstyti į dvi klases: dzeta funkcijos su Euler'io sandauga ir be jos.
Dzeta funkcijos su Euler'io sandauga paprastai vadinamos L-funkcijomis. Tikimasi, kad RH analogas šioms funkcijoms yra teisingas. Taip pat paminėsime galingą Langlands'o programą, kurioje pateikiamas požiūris, apjungiantis aritmetinių objektų L-funkcijas su automorfinėmis L-funkcijomis. Šios programos dalis yra A. Wiles'o rezultatas, galbūt žinomiausias šių dienų matematikos pasiekimas, iš kurio išplaukia Ferma problemos sprendimas.
Dzeta funkcijų, neturinčių Euler'io sandaugos, klasei priklauso Hurwitz'o, Lercho, Estermano, Epstein'o, periodinė ir panašios dzeta funkcijos. Šios dzeta funkcijos paprastai priklauso nuo tolydaus parametro ir dažniausiai joms RH analogas yra neteisingas. Spekuliatyviai šnekant, keisdami parametro reikšmes mes gauname vis kitas dzeta funkcijas, kurios vis labiau (mažiau) panašėja į klasikinę Rymano dzeta funkciją. Pavyzdžiui H.M. Stark'as įrodė, kad kiekvienam T galima rasti tokią Epstein'o dzeta funkciją, kurios visi kompleksiniai nuliai srityje $-1<\sigma<2$, $|t|<T$ guli kritinėje tiesėje $\sigma=1/2$; nors iš kitos pusės H. Davenport'as ir H. Heilbronn'as parodė, kad šios funkcijos turi be galo daug nulių kaip norima arti tiesės $\sigma=1$.
Manoma, kad kai kurios $\zeta(s)$ savybės išlieka teisingos abiem dzeta funkcijų klasėms. Tikimasi, kad Lyndelof'o hipotezė galioja nepriklausomai nuo Euler'io sandaugos. Panašiai Liniko-Ibrahimovo hipotezė teigia, kad visos dzeta funkcijos tenkinančios natūralias sąlygas turi universalumo savybę. Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcijai, daugeliui L-funkcijų, Hurwitz'o, Lerch'o, Estermano, periodinių dzeta funkcijų universalumo teoremos jau yra įrodytos.
Kai kurios aukščiau paminėtų problemų turi istorinių sąsajų su Lietuva. Prieš antrąjį pasaulinį karą mūsų universitete yra dirbęs matematikas J. Marcinkiewicz'ius, kuris pirmasis panaudojo terminą „universalumas“ (tačiau tais laikais buvo įrodomas tik funkcijų, pasižyminčių universalumu, egzistavimas; pirmą tokią konkrečią funkciją, Rymano dzeta funkciją, nurodė S.M. Voronin'as). T. Estermann'as, kurio vardo dzeta funkcija čia minima, yra gimęs Lietuvoje 1902 metais. Dzeta funkcijas Lietuvoje pirmasis pradėjo nagrinėti profesorius J. Kubilius ir tęsė jo mokiniai.

Analizinės skaičių teorijos modulis yra globojamas Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros. Ši katedra turi senas skaičių teorijos tradicijas ir didelę patirtį ruošiant doktorantus. Iki šiol paruošta virš 20 doktorantų. Šiuo metu katedroje vykdomus analizinės skaičių teorijos tyrimus galima suskirstyti į tris pagrindines kryptis:

1) Dzeta funkcijų ribinės teoremos ir universalumas;
2) Dzeta funkcijų momentai;
3) Dzeta funkcijų nuliai.

Šiose kryptyse katedros mokslininkai daro aktyvius tyrimai, spausdina daug mokslinių straipsnių prestižiniuose tarptautiniuose žurnaluose, leidžia monografijas. Analizinės skaičių teorijos modulio doktorantų uždaviniai būtų iš aukščiau trijų minėtų krypčių.

Modulio tikslai, ugdomi gebėjimai ir kompetencijos

Modulio tikslas yra suteikti doktorantui analizinės skaičių teorijos pagrindus. Jis bus supažindintas su pagrindiniais šios mokslo srities metodais, rezultatais ir hipotezėmis. Doktorantas išmoks rinkti ir sisteminti informaciją apie jam iškeltą uždavinį. Išmoks surinktą medžiagą ir atliktus tyrimus pateikti mokslinių straipsnių pavidalu.

Būtinosios žinios (prerekvizitai)

Matematinė analizė (12 kred.), algebra (4 kred.), kompleksinio kintamojo funkcijų teorija (4 kred.).

Į analizinės skaičių teorijos modulį įtraukti dalykai (pavadinimas, kreditai) (sandai yra priede)

1. Analizinė skaičių teorija 5 kr.
2. Dzeta funkcijos 5 kr.
3. Modulinės formos ir elipsinės kreivės 5 kr.
4. Silpnas matų konvergavimas 5 kr.
5. Algebriniai skaičiai ir diofantinė analizė 5 kr
6. Algebrinė geometrija 5 kr.
7. Funkcinė analizė 5 kr.

Mokslinių tyrimų kryptys

1. Dzeta funkcijų ribinės teoremos ir universalumas

Pagrindimas

Taikymuose yra svarbu žinoti dzeta funkcijų asimptotines savybes. Jas galima charakterizuoti įvairiais įverčiais, vidurkių asimptotika ir įverčiais. Praėjusio amžiaus trečiame dešimtmetyje H. Boras (Bohr) ir B. Jesenas (Jessen) pasiūlė dzeta funkcijų asimptotinio elgesio reguliarumą charakterizuoti ribinėmis teoremomis, kurios yra artimos šiuolaikinėms ribinėms teoremoms silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme. Tokias teoremas galima įrodyti dzeta funkcijoms realiojoje erdvėje, kompleksinėje plokštumoje, analizinių, meromorfinių ir net tolydžiųjų funkcijų erdvėse.
Dzeta funkcijų universalumas reiškia, kad dzeta funkcijų postūmiai norimu tikslumu tolygiai kompaktinėse aibėse aproksimuoja bet kokią analizinę funkciją. Universalumas yra svarbi dzeta funkcijų savybė, leidžianti sudėtingų funkcijų įverčius bei asimptotinį elgesį įvertinti paprastesnių dzeta funkcijų pagalba. Universalumo savybė gali būti pritaikyta, pavyzdžiui, kvantinėje mechanikoje nagrinėjant sudėtingus integralus pagal analizines kreives. Įdomu pastebėti, kad grynai analizinės dzeta funkcijų savybės –

universalumo įrodymui yra naudojamos šių funkcijų ribinės teoremos analizinių funkcijų erdvėje. Tai rodo ribinių teoremų svarbą.
Rymano dzeta funkcijos universalumą 1975 metais atrado S.M. Voroninas (Voronin). Jo teoremą patikslino ir įrodė kitoms dzeta funkcijoms A. Laurinčikas, B. Bakčis (Bagchi), S.M. Gonekas (Gonek), K. Macumotas (Matsumoto), J. Štaudingas (Steuding) ir visa eilė jaunų lietuvių ir japonų matematikų.

Studijuojami dalykai

a) Analizinė skaičių teorija
b) Dzeta funkcijos
c) Modulinės formos ir elipsinės kreivės
d) Silpnas matų konvergavimas
e) Funkcinė analizė

Literatūra

1. D. Joyner, Distribution Theorems of L-Functions, Pitman Research Notes in Mathematics, 1986.
2. A.A. Karatsuba, S.M. Voronin, The Riemann Zeta-Function, de Gruyter, New York, 1992.
3. A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1996.
4. A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 2002.
5. K. Matsumoto, Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions, Sugaku Expositions **17** (2004), 51-71.
6. J. Steuding, Value-Distribution of L-Functions, Lecture Notes in Math. 1877, Springer, Berlin, 2007.

Keliami uždaviniai

Numatoma įrodyti ribines teoremas naujoms dzeta funkcijoms ir Dirichlė eilučių klasėms, įvertinti tose teoremose konvergavimo greitį.
Išnagrinėti Hurvico dzeta funkcijos atvejį su algebriniu irracionaliu parametru.
Dirbti Liniko-Ibrahimovo hipotezės, tvirtinančios, kad kiekviena funkcija kurioje nors pusplokštumėje apibrėžiama Dirichlė eilute, analiziškai pratęsiama į kairę nuo šios pusplokštumės ir tenkinanti kai kurias, natūralias augimo sąlygas, yra universali Voronino prasme, linkme.
Gauti universalumo tankio įverčius įvairioms dzeta funkcijoms.

2. Dzeta funkcijų momentai

Pagrindimas

Apie konkrečias dzeta funkcijų reikšmes yra žinoma labai nedaug. Tačiau, sprendžiant įvairius uždavinius, dažnai individualios dzeta funkcijų reikšmės yra pakeičiamos jų vidurkiais, kurie paprastai yra vadinami momentais. Pavyzdžiui, modulio pagrindime minėta Lindeliofo hipotezė yra ekvivalenti kai kuriems Rymano dzeta funkcijos natūrinės eilės momentų įverčiams. Momentų įverčiai yra naudojami ribinių teoremų ir universalumo įrodymuose, jie yra svarbūs ir dzeta funkcijų nulių išsidėstymo tyrimuose. Iš kitos pusės, momentų problema, pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcijai yra savaime labai įdomi, tačiau ne mažiau sudėtinga. Todėl daugelio matematikų jai skiriams didelis dėmesys yra pilnai suprantamas.

Studijuojami dalykai

a) Analizinė skaičių teorija
b) Dzeta funkcijos
c) Modulinės formos ir elipsinės kreivės
d) Algebriniai skaičiai ir diofantinė analizė

Literatūra

1. A. Ivič, The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications, Wiley, New York, 1995.
2. A. Ivič, Mean Values of the Riemann Zeta-Function, Tata institute of Fundamental Research, Springer Verlag, Berlin, 1991.
3. H. Iwaniec, E. Kowalski, Analytic Number Theory, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.
4. A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1996.
5. A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 2002.
6. K. Matsumoto, Recent developments in the mean square theory of the Riemann zeta and other zeta-functions, in: Number Theory, Trends Math., Birkhauser, Boston, 2000, 241-286.
7. J. Steuding, Value-Distribution of L-Functions, Lecture Notes in Math. 1877, Springer, Berlin, 2007.
8. E.C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, 2nd Edition, revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.

Keliami uždaviniai

Gauti periodinės dzeta funkcijos ketvirtojo momento asimptotiką, įrodyti šiai funkcijai Atkinsono formulės analogą.
Išnagrinėti automorfinių formų dzeta funkcijų momentus kritinėje tiesėje ir kritinėje juostoje.
Pabandyti gauti aukštesniųjų Rymano dzeta funkcijos momentų įverčius.

3. Dzeta funkcijų nuliai

Pagrindimas

Viena iš svarbiausių matematikos problemų yra dzeta funkcijų pasiskirstymas. Bene labiausiai matematikus domina garsioji Rymano hipotezė – viena iš 7 svarbiausių tūkstantmečio problemų.
Gerai žinoma, kad dzeta funkcijų nulių išsidėstymas turi esminę įtaką daugelio uždavinių sprendimui. Pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcijos nulių problema neatsiejamai susijusi su pirminių skaičių asimptotiniu pasiskirstymo dėsniu, turi ryšį su įvairiais kvantinės mechanikos uždaviniais. Todėl dzeta funkcijų nulių išsidėstymo problema yra daugelio pačių žymiausių matematikų dėmesio centre. Tačiau, nežiūrint didelių pastangų ši problema yra tiek sudėtinga, kad per paskutinį šimtmetį nuo de la Valė Puseno (Poussin) ir Adamaro (Hadamard) laikų ji nedaug pasistūmėjo į priekį. Matyt, reikalingos naujos idėjos jo sprendimui, o naujas idėjas generuoja jauni žmonės. Todėl su šia problema turėtų susipažinti kiekvienas skaičių teorijos doktorantas.

Studijuojami dalykai

a) Dzeta funkcijos
b) Algebriniai skaičiai ir diofantinė analizė
c) Algebrinė geometrija
d) Funkcinė analizė

Literatūra

1. A. Ivič, The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications, Wiley, New York, 1995.
2. H. Iwaniec, E. Kowalski, Analytic Number Theory, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.
3. A.A. Karatsuba, S.M. Voronin, The Riemann Zeta-Function, de Gruyter, New York, 1992.
4. A. Laurinčikas, R. Garunkštis, The Lerch Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 2002.
5. K. Prachar, Primzahlverteilung, Springer-Verlag, Berlin, Gotingen, Heilderberg, 1957.
6. E.C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, 2nd Edition, revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.

Keliami uždaviniai

Išnagrinėti įvairių sumų pagal klasikinių dzeta funkcijų nulius asimptotiką.
Gauti dzeta funkcijų nulių skaičiaus įverčius įvairiose srityse.
Nurodyti sritis, kuriose dzeta funkcijos su periodiniais koeficientais, neturi nulių.