VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

Živilė JESEVIČIŪTĖ

TIKRINIŲ REIKŠMIŲ UŽDAVINYS DIFERENCIALINIAM OPERATORIUI SU NELOKALIOSIOMIS INTEGRALINĖMIS SĄLYGOMIS

DAKTARO DISERTACIJA

FIZINIAI MOKSLAI,
MATEMATIKA (01P)

VGTU
LEIDYKLA
Vilnius TECHNIKA 2010

Disertacija rengta 2005–2009 metais Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas

prof. habil. dr. Mifodijus SAPAGOVAS (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

http://leidykla.vgtu.lt

VGTU leidyklos TECHNIKA 1717-M mokslo literatūros knyga

ISBN 978-9955-28-536-6

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

Živilė JESEVIČIŪTĖ

THE EIGENVALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL OPERATOR WITH NONLOCAL INTEGRAL CONDITIONS

DOCTORAL DISSERTATION

PHYSICAL SCIENCES,
MATHEMATICS (01P)

VGTU LEIDYKLA
Vilnius TECHNIKA 2010

Doctoral dissertation was prepared at Institute of Mathematics and Informatics in 2005–2009.

Scientific Supervisor

Prof Dr Habil Mifodijus SAPAGOVAS (Institute of Mathematics and Informatics, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

Reziumė

Disertacijoje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Tikrinių reikšmių uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis yra viena iš naujesnių nelokaliųjų diferencialinių uždavinių tyrinėjimo sričių. Spektro struktūros tyrimas svarbus: nagrinėjant diferencialinio ir skirtuminio uždavinių sprendinio egzistavimą ir vienatį; skirtuminių lygčių sistemos sprendimui iteraciniais metodais; skirtuminių schemų parabolinėms lygtims stabilumui tirti. Be to, spektro struktūros tyrimas yra atskiras svarbus uždavinys. Atlikto disertacinio darbo rezultatai praplečia ir papildo iki šiol kitų mokslininkų gautus rezultatus tiriant šiuos ir panašius uždavinius.

Disertaciją sudaro įvadas, šeši skyriai, bendrosios išvados, literatūros sąrašas ir autorės publikacijų sąrašas.

Įvadiniame skyriuje aprašyta tiriamoji problema ir temos objektas, išanalizuotas temos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, uždaviniai, naudojama tyrimų metodika, mokslinis darbo naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai ir darbo rezultatų aprobavimas, aptarta disertacijos stuktūra.

Pirmajame skyriuje ištirta diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro struktūra, jos priklausomybė nuo parametrų reikšmių iš nelokaliųjų sąlygų ir integravimo rėžių parinkimo.

Disertacijoje didelis dėmesys yra skiriamas tikrinių reikšmių uždaviniui skirtuminiam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Antrajame disertacijos skyriuje išsamiai ištirti šio uždavinio kokybiniai spektro struktūros pasikeitimai.

Trečiajame ir ketvirtajame skyriuose analizuojamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis ir kintamais koeficientais, kai kintami koeficientai yra nelokaliosiose sąlygose arba diferencialinėje lygtyje. Spektro struktūra nagrinėjama tiek analiziniu, tiek skaitiniu būdu. Įrodomos kai kurios tikrinių reikšmių savybės. Atliktas skaitinis eksperimentas kartotinių ir kompleksinių tikrinių reikšmių analizei.

Penktajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys dvimačiam elipsiniam operatoriui su integralinėmis sąlygomis.

Šeštajame skyriuje pateikta parabolinių lygčių su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis skirtuminių schemų stabilumo analizė, taikant pirmuose skyriuose gautus rezultatus apie skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūrą. Stabilumo sąlygos apibrėžiamos ir įrodomos per tikrines šio uždavinio reikšmes.

Abstract

In the dissertation, the eigenvalue problem for a differential operator with nonlocal integral conditions is investigated. This work extends and supplements the results of other scientists in this area. Eigenvalue problems with nonlocal conditions are one of the newest investigation areas of nonlocal differential problems. Investigations of the spectrum structure is rather important for the analysis of differential and difference problems existence and uniqueness of their solution; for the solution of difference schemes using iterative methods; for the stability analysis of difference schemes of parabolic equations. However, investigation of the spectrum structure is a separate important problem. This work extends and supplements the results of other scientists in this area.

The doctoral dissertation consists of the introduction, six chapters, conclusions, the list of references and the list of author's publications.

In the introduction the topicality of the problem is defined, the goals and tasks of the research are formulated, the scientific novelty of the dissertation, the methodology of research, the practical value and the significance of the results are presented.

In the first chapter, the spectrum structure of a differential operator with nonlocal integral conditions is explored as well as its dependence on the parameters of nonlocal conditions and on interval of integration.

In the dissertation, much attention is paid to the eigenvalue problem for a difference operator with nonlocal integral conditions. In the second chapter of the dissertation, qualitative changes in the spectrum structure of this problem are analyzed comprehensively. The structure of the spectrum is analyzed both in an analytical and numerical way. Some properties of eigenvalues are proved. The numerical experiment is done to examine multiple and complex eigenvalues.

In the fifth chapter, the eigenvalue problem for a two-dimensional elliptic operator with integral conditions is considered. Eigenvalue properties are formulated and proved.

In the sixth chapter of the dissertation, the stability analysis of difference schemes of parabolic equations with nonlocal integral conditions is presented, obtained applying the results on the spectrum structure of difference operators with nonlocal conditions described in the previous chapters.

Turinys

Contents

Įvadas

Problemos formulavimas

Diferencialinės lygtys yra viena iš plačiausiai taikomų matematikos mokslo šakų kitose mokslo srityse. Diferencialinėmis lygtimis yra aprašomi įvairūs procesai. Per keletą dešimtmečių plačiai išaugo susidomėjimas diferencialinėmis lygtimis su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis. Nelokaliosiomis vadiname tokias sąlygas, į kurias įeina funkcijos ar jos išvestinės reikšmės nemažiau kaip dviejuose skirtinguose (kraštiniuose arba vidiniuose) taškuose. Kitaip tariant, nelokaliosios sąlygos apibrėžia sąryšį tarp sprendinio reikšmių intervalo kraštiniuose ir vidiniuose taškuose. Jei nelokaliosios sąlygos apibrėžiamos vietoje kraštinių sąlygų ir jose yra kraštinis taškas, tai šias sąlygas vadiname nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Nelokaliosios sąlygos atsiranda tada, kai negalima išmatuoti duomenų nagrinėjamo uždavinio srities krašte.

Disertacijoje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis.

Darbo aktualumas

Diferencialiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis gana plačiai nagrinėjama matematikos šaka. Tokių uždavinių tyrimą skatina fizikos, biologijos, mechanikos, chemijos ir kitos mokslo sritys. Diferencialinėmis lygtimis su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis gali būti aprašomi įvairūs praktiniai uždaviniai: šilumos laidumo (Cannon 1963; Kamynin 1964), šiluminio tamprumo (Day 1982, 1985, 1992) difuzijos (Būda *et al.* 1986; Cannon *et al.* 1993), elektrocheminės difuzijos (Choi and Chan 1992), termostato (Kalna and McKee 2004), lašo laisvojo paviršiaus (Čiegis *et al.* 1995; Finn 1986; Ragulskis *et al.* 1986), cikliniai bioreaktorių (Schugerl 1987), hidrodinamikos, dirvožemio drėkinimo modeliavimo (Nakhushev 1995) ir kiti (Avalishvili and Gordeziani 2003; Gordeziani and Davitashvili 1999). Nagrinėjant šiuos uždavinius dažniausiai reikšmingi būna tik teigiami sprendiniai, todėl daugelyje darbų šie sprendiniai ir analizuojami. Tačiau diferencialiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis dar nėra pilnai ir išsamiai išnagrinėti, nes tai gana plati tyrinėjimo sritis. Plačiau yra išnagrinėti tik atskiri atvejai.

Šioje disertacijoje nagrinėjamos antros eilės diferencialinės lygtys su nelokaliosiomis sąlygomis, todėl plačiau aptarsime kitų autorių atliktus tyrinėjimus, susijusius su tokio tipo uždaviniais. Taip pristatysime darbo aktualumą.

Elipsinio tipo lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis pradininkais yra laikomi A. A. Samarskis ir A. V. Bitsadzė. 1969 m. jie pradėjo tirti dvimatį elipsinį uždavinį (1969).

Bitsadzės ir Samarskio vardu vadinamos sąlygos vienamačiu atveju yra pavidalo

$$u(a) = \gamma_0 u(\xi_0) + \mu_0, \quad a < \xi_0 < b, \tag{1}$$

$$u(b) = \gamma_1 u(\xi_1) + \mu_1, \quad a < \xi_1 < b. \tag{2}$$

Vėlesniais metais diferencialinis uždavinys su nelokaliosiomis Bitsadzės ir Samarskio sąlygomis buvo plačiau analizuotas daugelyje darbų (Čiegis 1984; Il'in and Moiseev 1987; Sapagovas and Čiegis 1987b). Nagrinėjama sprendinio egzistavimas, vienatis ir glodumas. Pastarąjį dešimtmetį taip pat sutinkama gana daug publikacijų šia tema su Bitsadzės ir Samarskio arba daugiataškėmis kraštinėmis sąlygomis (Pečiulytė 2006; Sapagovas *et al.* 2007; Sapagovas and Štikonas 2005; Štikonas and Štikonienė 2009).

Straipsnyje (Sapagovas and Čiegis 1987b) nagrinėjama plati klasė nelokaliųjų sąlygų antros eilės diferencialinėms lygtims, suformuluojamos būtinos ir pakankamos sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygos, tiriamos skirtuminės schemos šiems uždaviniams. Taip pat užrašomos ir netiesinės diferencialinės lygties pakankamos vienintelio sprendinio egzistavimo sąlygos. Įrodymas paremtas bendrojo sprendinio išraiška per Gryno funkciją.

Parabolinio tipo lygtys su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis pradėtos nagrinėti J. R. Cannon 1963 metų publikacijoje (1963) ir 1964 metų L. I. Kamynin straipsnyje (1964), kuriuose nagrinėjama šilumos sklidimo lygtis. Uždavinio formulavime viena kraštinė sąlyga keičiama į nelokaliąją integralinę sąlygą

$$\int_a^b g(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x = E(t), \qquad 0 \le t \le T,$$

čia a ir b bendru atveju yra kintamojo t funkcijos. Ši nelokalioji sąlyga interpretuojama kaip šilumos kiekio (energijos) tvermės dėsnis.

1977 m. N. I. Ionkin straipsnyje (1977) nagrinėjama parabolinė lygtis su kitokio tipo nelokaliąja sąlyga, kuri susieja nežinomos funkcijos kraštinius taškus

$$u'(a) = u'(b).$$

Vienmačiai ir dvimačiai diferencialiniai uždaviniai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis dažnai sutinkami mokslinėje literatūroje (Bandirskii *et al.* 2006; Čiegis 2005, 2006; Liu 1999; Pečiulytė *et al.* 2005, 2008, Sajavičius and Sapagovas 2009; Sapagovas 2005, 2008; Wang 2002). M. Sapagovo ir R. Čiegio straipsnyje (1987a) vienamačiu atveju rastos vienintelio sprendinio egzistavimo sąlygos. Skirtuminės schemos naudojamos ir nagrinėjamos apytiksliam sprendiniui rasti M. Dehghan darbe (2003).

R. Čiegis ir M. Meilūnas straipsnyje (1993) nagrinėjo lygčių sistemą, kai difuzijos ir šiluminio talpumo koeficientai netiesiniai. Buvo įrodytas besąlyginis sukonstruotų skirtuminių schemų konvergavimas C normoje $O(\tau + h^2)$ greičiu, bei įrodytas pasiūlyto iteracinio proceso konvergavimas geometrinės progresijos greičiu. Pateikta algoritmo modifikacija, leidžianti adaptyviai parinkti diskretųjį parametrą τ. Panaudojant Ričardsono ekstrapoliaciją, sukonstruota $O(\tau^2 + h^2)$ tikslumo schema.

Tikrinių reikšmių uždavinys paprastajam diferencialiniam operatoriui, o taip pat elipsinio tipo operatoriui dvimačiu atveju su nelokaliąja Bitsadzės ir Samarskio sąlyga skirtuminiais metodais pradėtas tirti M. Sapagovo (2002b) ir M. Sapagovo, A. Štikono (2005) straipsniuose.

Darbuose (Pečiulytė and Štikonas 2006; Štikonas 2007; Štikonas and Štikonienė 2009) tiriamas Šturmo ir Liuvilio (Sturm–Liouville) uždavinys

$$-u'' = \lambda u, \quad x \in (0,1) \tag{3}$$

su viena klasikine kraštine sąlyga

$$u(0) = 0, \tag{4}$$

ir nelokaliosiomis Bitsadzės ir Samarskio tipo sąlygomis

$$\begin{aligned}
u'(1) &= \gamma u(\xi), && \text{(1 atv.)} && (5_1)\\
u'(1) &= \gamma u'(\xi), && \text{(2 atv.)} && (5_2)\\
u(1) &= \gamma u'(\xi), && \text{(3 atv.)} && (5_3)\\
u(1) &= \gamma u(\xi), && \text{(4 atv.)} && (5_4)
\end{aligned}$$

su parametrais $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ ir $\xi \in [0,1]$.

S. Pečiulytės ir A. Štikono straipsnyje (2006) rastos bendros tikrinių reikšmių ir tikrinių funkcijų savybės kompleksinėje erdvėje. Taip pat ištirtos realiosios tikrinės reikšmės su realiaisiais parametrais γ ir ξ. Gauta, kad tiriamo uždavinio (3), (4) ir nelokaliosios sąlygos pirmais trimis atvejais (5_1), (5_2), (5_3) spektro savybės yra tos pačios. Visos pastoviosios tikrinės reikšmės yra realios ir teigiamos. Parodyta, kad 1 ir 2 atvejais egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, kai $\gamma > \gamma_0$, ir 3 atveju egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, kai $\gamma > 1$ ir $\xi \leq \sqrt{3}/3$ ir kai $0 < \gamma < 1$ ir $\xi = 1$; 3 atveju egzistuoja dvi neigiamos tikrinės reikšmės, kai $0 < \gamma_* < \gamma < \gamma_0 = 1$ ir $\xi \in (\sqrt{3}/3, 1)$. Tirta sritis ir užrašytos sąlygos, kada 3 atveju gali atsirasti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

Straipsnyje (Pečiulytė and Štikonas 2006) nagrinėjamos šio Šturmo ir Liuvilio (3)–(5_4) uždavinio tikrinės funkcijos. Gauti teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalai visais keturiais atvejais. Rastos parametro γ reikšmės, su kuriomis egzistuoja teigiamos tikrinės funkcijos intervale $(0,1)$ kiekvienam $\xi \in (0,1)$. Rastos būtinos ir pakankamos sąlygos, kada egzistuoja mažiausiai viena teigiama tikrinė reikšmė ar ją atitinkanti tikrinė funkcija. S. Pečiulytės ir A. Štikono darbe (2008) suformuluotos lemos apie pirmosios ir antrosios eilės prijungtinių funkcijų egzistavimą ir rastos šios funkcijos.

A. Štikonas (2007) aprašo Šturmo ir Liuvilio uždavinį (3), (4) su nelokaliąja sąlyga (5_4) iš 4 atvejo. Ištirtos charakteristinės funkcijos ir uždavinio spektro savybės. Aprašytas kokybinis tikrinių reikšmių pasiskirstymas priklausomai nuo nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų. Išsami nelokaliųjų uždavinių apžvalga ir gautų rezultatų apibendrinimas pateiktas A. Štikono ir O. Štikonienės darbe (2009). Rastos naujo tipo charakteristinės funkcijos uždaviniui (3), (4), (5_4). Šios funkcijos pagalba nagrinėtos kompleksinės dalies savybės.

Disertacijoje nagrinėjama diferencialinė lygtis su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Pirmajame ir antrajame skyriuose tiriamas nelokalusis tikrinių reikšmių uždavinys vienamatei diferencialinei lygčiai. Pradžioje, pirmame skyriuje, atliktas tyrimas diferencialiniu, vėliau, antrame skyriuje, skirtuminiu atvejais.

Tikrinių reikšmių uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis yra viena iš naujesnių nelokaliųjų diferencialinių uždavinių tyrinėjimo sričių. Šie uždaviniai yra glaudžiai susiję su diferencialinių lygčių kraštiniais uždaviniais (Greenberg and Marletta 2001; Sapagovas 2007). Spektro struktūros tyrimas svarbus: nagrinėjant diferencialinio ir skirtuminio uždavinių sprendinio egzistavimą ir vienatį (Ionkin *et al.* 1992); skirtuminių lygčių sistemos sprendimui iteraciniais metodais (Manteuffel 1977; Sapagovas 2002b); skirtuminių schemų parabolinėms lygtims stabilumui (Cahlon *et al.* 1995; Čiegis *et al.* 2002; Gulin *et al.* 2001, 2006a; Ivanauskas *et al.* 2009; Sapagovas 2005; Sapagovas *et al.* 2007). Be to, spektro struktūros tyrimas yra atskiras svarbus uždavinys (Mennicken and Moller 2003; Sapagovas 2007).

Tikrinių reikšmių uždavinys, spektro tyrimas ir panašūs uždaviniai diferencialinėms lygtims su nelokaliosiomis Bitsadzės ir Samarskio ar daugiataškėmis kraštinėmis sąlygomis analizuojami darbuose (Gulin and Morozova 2003; Infante 2005; Pečiulytė 2006; Sapagovas 2002b; Sapagovas and Štikonas 2005; Štikonas and Štikonienė 2009), su integralinėmis sąlygomis – darbuose (Cahlon *et al.* 1995; Infante 2005; Pečiulytė and Štikonas 2007a; Sapagovas 2008).

Antros eilės paprastojo diferencialinio operatoriaus su nelokaliąja sąlyga tikrinių reikšmių uždavinys buvo suformuluotas ir nagrinėtas 1977 m. N. I. Ionkino (1977) ir 1995 m. B. Cahlon, D. M. Kulkarni ir P. Shi (1995) straipsniuose. Straipsnyje (Cahlon *et al.* 1995) autoriai tikrinių reikšmių uždavinį sieja su vienamačių parabolinių lygčių skirtuminių schemų stabilumu. Straipsnyje buvo nagrinėjamas uždavinys su tokiomis kraštine ir nelokaliąja sąlygomis:

$$u_x(1,t) + ku(1,t) = 0, \quad k \geq 0,$$
$$\int_0^b u(x,t)\mathrm{d}x = E(t), \quad x \in [0,1], \quad b \leq 1.$$

M. Sapagovas straipsnyje (2002b) tikrinių reikšmių uždavinį sieja su skirtuminių lygčių sistemų su nelokaliosiomis sąlygomis sprendimu iteraciniais metodais, straipsniuose (Sapagovas 2005, 2008; Sapagovas *et al.* 2007) – su parabolinių lygčių skirtuminių schemų stabilumu.

Tikrinių reikšmių uždavinį diferencialinei lygčiai su integralinėmis nelokaliosiomis sąlygomis nagrinėja S. Pečiulytė, A. Štikonas ir O. Štikonienė (2005). Jie tyrė Šturmo ir Liuvilio uždavinį su viena klasikine kraštine sąlyga (3), (4) ir kita nelokaliąja integraline sąlyga

$$u(1) = \gamma \int_0^{\xi} u(x)\mathrm{d}x, \quad \text{(1 atv.)} \tag{6}$$

$$u(1) = \gamma \int_{\xi}^{1} u(x)\mathrm{d}x, \quad \text{(2 atv.)} \tag{7}$$

su parametrais $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ ir $\xi \in [0,1]$.

Ištirta šių uždavinių (3), (4), (6) ir (3), (4), (7) realiosios spektro dalies priklausomybė nuo parametrų γ ir ξ. Abiem atvejais šis uždavinys turi vieną nulinę tikrinę reikšmę, kai parametras $\gamma = \gamma_0$, $\gamma_0 = \frac{2}{\xi^2}$ (1 atv.); $\gamma_0 = \frac{2}{1-\xi^2}$ (2 atv.). Egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, kai $\gamma > \gamma_0$. Gauta, kad teigiamos spektrų dalys yra skirtingos realiesiems γ. Šiame uždavinyje, 2 atveju, egzistuoja tik realiosios tikrinės reikšmės; 1 atveju kai kuriems realiesiems γ gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

S. Pečiulytė, A. Štikonas (2007a) bei S. Pečiulytė, A. Štikonas ir O. Štikonienė straipsnyje (2008) nagrinėjo charakteristinės funkcijos kritinius taškus Šturmo ir Liuvilio uždaviniui (3), (4) ir įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis (5_1), (5_2), (5_3), (5_4), (6), (7). Buvo tirta, kaip kritiniai taškai priklauso nuo parametrų iš nelokaliųjų sąlygų. Straipsnyje (2008) didesnis dėmesys skiriamas neigiamiems kritiniams taškams. Išrašytos šių neigiamų kritinių taškų savybės.

Panašių uždavinių spektrą taip pat nagrinėjo V. L. Makarov, I. I. Lazurchak ir B. I. Bandyrsky (2003) bei G. V. Radzievski (1996).

Straipsnyje (Makarov *et al.* 2003) tikrinėms funkcijoms ir tikrinėms reikšmėms gauti pasitelkiamas skaitinis-analitinis metodas. Taip pat, naudojant diskretųfunkcinį metodą, randamos pakankamos paprastųjų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygos.

Trečiajame ir ketvirtajame disertacijos skyriuose analizuojamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis ir kintamais koeficientais, kai kintami koeficientai yra nelokaliosiose sąlygose ar diferencialinėje lygtyje. Tokio tipo darbų nėra gausu mokslinėje literatūroje. Yra ištirti tik kai kurie atskiri atvejai (Bandirskii and Makarov 2006; Bandirskii *et al.* 2000; Gulin and Morozova 2009; Ionkin and Valikova 1996; Sajavičius and Sapagovas 2009; Shkalikov 1982).

B. Bandyrskii, I. Lazurchak, V. Makarov ir M. Sapagovo straipsnyje (2006) nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys antros eilės diferencialinei lygčiai su kintamais koeficientais ir nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$
\begin{aligned}
&u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0, 0 < x < 1,\\
&u(0) = \int_0^1 u(x)\mathrm{d}\sigma_0(x),\\
&u(1) = \int_0^1 u(x)\mathrm{d}\sigma_1(x),
\end{aligned}
$$

čia $\sigma_0(x)$, $\sigma_1(x)$ duotos tam tikros funkcijos, $q(x) \geq 0$, kiekvienam $x \in [0, 1]$.

Šiame straipsnyje (Bandirskii *et al.* 2006) bei B. Bandyrskii ir V. L. Makarov straipsnyje (2000) aprašomas konstruktyvus funkcinis-diskretus algoritmas tikrinėms reikšmėms rasti. Darbe (Bandirskii *et al.* 2006) taip pat gautos atskiros kompleksinės tikrinės reikšmės. Įrodytas funkcinio-diskretaus metodo konvergavimas. Pateikti skaitinio eksperimento rezultatai.

N. I. Ionkin, E. A. Valikova (1996) ir S. Sajavičiaus, M. Sapagovo (2009) straipsniuose nagrinėjami nelokalieji tikrinių reikšmių uždaviniai su kintamais koeficientais diferencialinėje lygtyje. Diferencialiniai uždaviniai suvedami į skirtuminių lygčių sistemas ir jos analizuojamos. Buvo atlikti skaitiniai eksperimentai prie tam tikrų konkrečių kintamųjų koeficientų reikšmių, tiriamas tikrinių reikšmių išsibarstymas. A. A. Shkalikov nagrinėjo ir aprašė tikrinių funkcijų savybes (1982).

Paraboliniai uždaviniai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis bei jų skaitiniai sprendimo metodai tiriami gana aktyviai ir plačiai.

Vienas iš nagrinėjamų uždavinių parabolinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis yra

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad a < x < b,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}
$$

$$
u(a,t) = \int\limits_a^b \alpha(x)u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_1(t), \tag{9}
$$

$$u(b,t) = \int\limits_a^b \beta(x)u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_2(t), \tag{10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{11}$$

Pirmą kartą nelokaliosios sąlygos (9), (10) buvo apibrėžtos 1982 m. W. A. Day straipsnyje (1982). Čia buvo nagrinėjami tiesiniai šiluminio tamprumo uždaviniai. Šiame straipsnyje autorius įrodo, kad entropija $\eta(x,t)$ tūrio vienete yra parabolinės lygties

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad -l < x < l \tag{12}$$

su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\eta(-l,t) = -w \int\limits_{-l}^{l} (l-3x)\eta(x,t)\mathrm{d}x, \tag{13}$$

$$\eta(l,t) = -w \int\limits_{-l}^{l} (l+3x)\eta(x,t)\mathrm{d}x \tag{14}$$

ir pradine sąlyga

$$\eta(x,0) = \eta_0(x) \tag{15}$$

sprendinys. Čia a ir w yra fizikines ir geometrines savybes aprašančios konstantos.

Straipsniuose (Day 1982, 1983) buvo tirta šio uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygos vienmatėje srityje. Išsamią rezultatų ir bibliografijos apžvalgą apie šias nelokaliąsias sąlygas galima rasti G. Fairweather ir J. C. Lopez-Marcos (1996) bei M. Dehghan (2005, 2007) apžvalginiuose straipsniuose.

N. I. Ionkino straipsnyje (1977) yra tiriamos parabolinės lygtys su Samarskio ir Ionkino nelokaliosiomis sąlygomis. Šiame darbe įrodoma sprendinio egzistavimas ir vienatis tiriant diferencialinio operatoriaus tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas.

Parabolinės diferencialinės lygtys su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis taip pat nagrinėtos (Cahlon *et al.* 1995; Čiegis 2006; Čiegis *et al.* 2002; Ivanauskas *et al.* 2009; Makarov and Kulyev 1985), su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis (Ang 2006; Borovykh 2002; Day 1983; Dehghan 2002; Fairweather and Lopez-Marcos 1996; Liu 1999; Sapagovas 2002a); tokie uždaviniai elipsinėms lygtims tirti (Berikelaschvili 2003; Bitsadze and Samarskii 1969; Scheepper and Keer 1997; Wang 2002) ir hiperbolinėms lygtims (Beilin 2001; Bouziani 1997; Fairweather and Saylor 1991; Gordeziani and Avalishvili 2001; Zikirov 2007) straipsniuose.

Šeštajame disertacijos skyriuje pateikta parabolinių lygčių su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis skirtuminių schemų stabilumo analizė, taikant pirmuose skyriuose gautus rezultatus apie skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūrą.

Baigtinių skirtumų schemų su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis stabilumas buvo nagrinėtas daugelio užsienio autorių straipsniuose. Šis metodas plačiai taikomas bei analizuojamas ir Lietuvos mokslininkų darbuose (Čiegis 2005, 2006; Čiegis *et al.* 2002; Sapagovas 2005, 2008).

Vienas pirmųjų darbų, kuriuose nagrinėjami skirtuminių schemų teoriniai klausimai, yra 1991 m. G. Ekolin straipsnis (1991). Autorius įrodė išreikštinio ir neišreikštinio Oilerio metodų konvergavimą. Darbe taip pat apibrėžtos pakankamos vienintelio sprendinio egzistavimo sąlygos ir pateikta skirtuminių schemų parabolinėms lytims stabilumo analizė, kai nelokaliosios integralinės sąlygos yra (9), (10) tipo. Stabilumo sąlygos šiuo atveju buvo apibrėžtos sekančiai:

$$\int\limits_a^b |\alpha(x)|\mathrm{d}x < 1, \qquad \int\limits_a^b |\beta(x)|\mathrm{d}x < 1. \tag{16}$$

Panašios pakankamos stabilumo sąlygos (16) buvo gautos daugelyje straipsnių. Y. Liu straipsnyje (1999) įrodė vadinamo θ –metodo konvergavimą, kai $\theta \geq 1/2$. Autorius stabilumo sąlygas apibrėžė nelygybe

$$\int\limits_a^b |\alpha(x)|^2\mathrm{d}x + \int\limits_a^b |\beta(x)|^2\mathrm{d}x < 2. \tag{17}$$

G. Fairweather ir J. C. Lopez-Marcos straipsnyje (1996) gautos stabilumo sąlygos skirtuminei schemai netiesinei parabolinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis (9), (10)

$$\int\limits_a^b |\alpha(x)|^2\mathrm{d}x < 1, \qquad \int\limits_a^b |\beta(x)|^2\mathrm{d}x < 1. \tag{18}$$

Šiame straipsnyje sprendžiama vienmatė netiesinė parabolinė lygtis diskrečiuoju Galiorkino metodu.

Tiek G. Ekolin (1991), tiek G. Fairweather ir J. C. Lopez-Marcos (1996) straipsniuose optimalius paklaidos įverčius gavo maksimumo normoje, pasirėmę maksimumo principu. Straipsniuose (Ekolin 1991; Liu 1999) nagrinėti metodai ir gauti rezultatai apibendrinti N. Borovykh darbe (2002).

Skirtuminių schemų stabilumas parabolinėms lygtims su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis nagrinėjamas straipsniuose (Čiegis *et al.* 2001, 2002; Goolin *et al.* 2001, 2006a, 2006b; Gulin and Morozova 2003, 2009). V. L. Makarov ir D. T. Kulyev straipsnyje (1985) naudojamas tiesių metodas kvazitiesinėms parabolinėms lygtims spręsti.

R. Čiegio, A. Štikono, O. Štikonienės ir O. Suboč straipsnyje (Čiegis *et al.* 2002) išnagrinėtas uždavinys

$$\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - q(x,t)u + f(x,t), x \in (0,1), t \in (0,T], \tag{19}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in [0,1], \tag{20}$$

$$u(0,t) = \gamma_0(\tilde{\alpha}_0(t)u(\tilde{x}_0(t),t) + \int_0^1 \tilde{\beta}_0(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x) + f_0(t), \tag{21}$$

$$u(1,t) = \gamma_1(\tilde{\alpha}_1(t)u(\tilde{x}_1(t),t) + \int_0^1 \tilde{\beta}_1(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x) + f_1(t), \tag{22}$$

čia $t \in (0,T]$, $\rho(x,t) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x,t) \geq 0$, $0 \leq \tilde{x}_l(t) \leq 1$, α_l ir β_l yra žinomos funkcijos, o parametrai $(\gamma_0,\gamma_1) \in \mathbb{R}^2_+ = \{(\gamma_0,\gamma_1)|\gamma_l \geq 0\}, l = 0,1$.

Straipsnyje (Čiegis *et al.* 2001) ištirtas uždavinį (19)–(22) atitinkantis stacionarusis uždavinys. Šiuose darbuose nagrinėjamas tiek diferencialinis, tiek skirtuminis uždaviniai, tiriama, kaip jų sprendinio egzistavimas priklauso nuo parametrų $\gamma_l, l = 0,1$ reikšmių, surastos vienintelio neneigiamo sprendinio egzistavimo sritys. Buvo gautos būtinos ir pakankamos sprendinio korektiškumo sąlygos pagal maksimumo normą stacionariajam uždaviniui tiek diferencialiniu, tiek skituminiu atveju (Čiegis *et al.* 2001), o baigtinių skirtumų schemai parabolinio uždavinio atveju pakankamos skirtuminio sprendinio korektiškumo sąlygos (Čiegis *et al.* 2002).

A. Gulino ir V. Morozovos straipsnyje (2009) nagrinėjama šiluminio laidumo lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{23}$$

$$u(0,t) = \alpha u(1,t), \quad \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \tag{24}$$

čia α ir γ yra duoti realūs skaičiai.

Kai $\alpha = 0$ ir $\gamma = 1$ (Samarskio ir Ionkino uždavinys), tai A. Gulino, I. Ionkino ir V. Morozovos straipsnyje (2001) buvo nagrinėtos šio uždavinio (23)–(24) tiksli ir svorinė skirtuminės schemos. Sukonstruota energetinė norma ir pateiktos skirtuminių schemų būtinosios ir pakankamosios stabilumo sąlygos.

Atvejis, kai $\alpha = 0$ ir $\gamma \in [0, 1)$, detaliau išnagrinėtas straipsnyje (Gulin *et al.* 2006). Rastos šio uždavinio skirtuminės schemos būtinosios ir pakankamosios stabilumo sąlygos energetinėje normoje. Taip pat įrodytas šios normos ekvivalentiškumas tinklelio L_2–normai.

Straipsnyje (Gulin and Morozova 2009) išsamiai nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys. Koordinačių plokštumoje (α, γ) buvo rasta sritis, kurioje visos tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos yra realios. Buvo parodyta, kad skirtuminės schemos yra simetrinės realioje srityje, t. y. šių schemų perėjimo operatoriai yra panašūs į saujungtinius. Apibrėžtos būtinosios ir pakankamosios skirtuminės schemos stabilumo sąlygos energetinėje normoje, kuri yra ekvivalenti L_2–normai.

Literatūroje galima aptikti autorių darbus, kurie nagrinėja auštesnės eilės diferencialines lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis (pvz.: O. S. Zikirov (2007)). Dažniausiai šie uždaviniai atsiranda techniniuose taikymuose. Nagrinėjami taip pat daugiataškiai uždaviniai n-tosios eilės $(n \geq 3)$ paprastosioms diferencialinėms lygtims (P. W. Eloe ir J. Henderson (1997, 2007)). Trečios eilės diferencialinei lygčiai tikrinių reikšmių uždavinys nagrinėjamas J. R. Graef ir J. R. L. Webb straipsnyje (2009); skirtuminės schemos parabolinei lygčiai – R. Čiegio (2005); teigiamų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygos rastos ketvirtos eilės diferencialiniam uždaviniui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis H. Ma (2008); apibendrinta teorija iš G. Infante ir J. R. L. Webb darbų ir pritaikyta aukštesnės eilės diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis nagrinėjimui pateikta straipsnyje J. R. L. Webb (2009).

Daugiataškį nelokalųjį kraštinį uždavinį antros eilės paprastosioms diferencialinėms lygtims vienamačiu atveju pradėjo nagrinėti V. Il'in ir E. I. Moiseev (1987). Šiame straipsnyje išnagrinėtos pakankamos vienintelio sprendinio egzistavimo sąlygos tiek diferencialiniam, tiek skirtuminiam uždaviniams. Dažnai literatūroje aptinkami netiesiniai nelokalūs uždaviniai su tritaškėmis (Gupta and Trofimchuk 1997; Infante and Web 2003; Ma 1998, 2000) arba m-taškėmis kraštinėmis sąlygomis (Cao and Ma 2000; Eloe and Henderson 1997; Gupta *et al.* 1994; Palamides 2002).

Daugelis autorių nagrinėja netiesinius nelokaliuosius uždavinius. Literatūroje dažnai sutinkama antros eilės diferencialinė lygtis

$$u''(t) + g(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in (0, 1) \tag{25}$$

su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis.

Tokius uždavinius su įvairiomis integralinėmis ir daugiataškėmis sąlygomis tiria G. Infante (2003, 2005), J. R. L. Webb ir G. Infante (2008). G. Infante (2003, 2005) nustatė sąlygas, kurioms esant nagrinėjami uždaviniai turi teigiamas tikrines reikšmes. Buvo rastos tas tikrines reikšmes atitinkančių tikrinių funkcijų egzistavimo sritys.

Panašaus tipo uždavinius su m-taškėmis kraštinėmis sąlygomis nagrinėjo C. P. Gupta kartu su bendraautoriais (1994), D. Cao ir R. Ma (2000); taip pat ir uždavinius su tritaškėmis kraštinėmis sąlygomis tyrė R. Ma (1998, 2000), C. P. Gupta (1997).

Netiesinius nelokaliuosius uždavinius su integralinėmis sąlygomis nagrinėjo G. L. Karakostas ir P. Ch. Tsamatos (2000a; 2002). Straipsniuose įrodomos pakankamos teigiamų sprendinių egzistavimo sąlygos, apatinio ir viršutinio sprendinio egzistavimas. Netiesinį tikrinių reikšmių uždavinį nagrinėjo J. Henderson ir H. Wang (1997).

P. K. Palamides (2002) tyrinėjo antros eilės paprastąją diferencialinę lygtį su viena trečiojo tipo sąlyga, o kita daugiataške kraštine sąlyga (1.28). Straipsnyje įrodomas teigiamo ir monotoniško sprendinio egzistavimas, kai funkcija f yra subtiesinė arba supertiesinė.

Tyrimų objektas

Disertacijos tyrimo objektas – diferencialinis operatorius su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, šio uždavinio spektro struktūra, skirtuminės schemos, rezultatų taikymas skirtuminių schemų stabilumui tirti.

Darbo tikslas ir uždaviniai

Disertacijos tikslas – ištirti diferencialinio ir jam atitinkančio skirtuminio operatorių su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro struktūrą, tikrinių reikšmių priklausomybę nuo parametrų, esančių nelokaliosiose sąlygose, reikšmių.

Siekiant numatyto tikslo buvo sprendžiami šie uždaviniai:

- Išnagrinėti tikrinių reikšmių uždavinį vienmačiam diferencialiniam ir jį atitinkančiam skirtuminiam operatoriams su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis.
- Išanalizuoti diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis sąlygomis ir kintamais koeficientais tikrinių reikšmių pasiskirstymą. Ištirti kintamųjų koeficientų įtaką kartotinių ir kompleksinių tikrinių reikšmių atsiradimui, nustatyti šių reikšmių atsiradimo sritis.
- Ištirti tikrinių reikšmių uždavinio diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis sąlygomis dvimatį atvejį. Nustatyti nelokaliųjų integralinių sąlygų parametrų įtaką tikrinių reikšmių pasiskirstymui.
- Skirtuminių schemų stabilumo parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis analizė, t. y. ištirti baigtinių skirtumų schemų, aproksimuojančių nelokalųjį parabolinį uždavinį, stabilumą.

Tyrimų metodai

Darbe taikomas analizinis diferencialinės ir skirtuminės lygties sprendinių tyrimo metodas. Nagrinėjama diferencialinės ir skirtuminės lygties bendrojo sprendinio išraiška, o šioje išraiškoje esančios laisvosios konstantos randamos iš nelokaliųjų sąlygų. Nagrinėjama operatorių spektro struktūra. Taip pat taikomas skaitinio eksperimento bei matematinio modeliavimo metodas. Tai padeda geriau suprasti spektro struktūrą, bei šią struktūrą lemiančias priežastis. Atliekant skaitinį eksperimentą, naudotasi programų paketais Mathcad ir Maple.

Darbo mokslinis naujumas ir jo reikšmė

Disertacijoje išnagrinėtas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Atlikto darbo rezultatai praplečia ir papildo iki šiol kitų mokslininkų gautus rezultatus tiriant šiuos ir panašius uždavinius.

Ištirta diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro struktūra, jos priklausomybė nuo parametrų reikšmių iš nelokaliųjų sąlygų ir integravimo rėžių parinkimo.

Disertacijoje didelis dėmesys yra skiriamas tikrinių reikšmių uždaviniui skirtuminiam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Išsamiai ištirti šio uždavinio kokybiniai spektro struktūros pasikeitimai. Atskirais atvejais surastos tikrinės funkcijos ir tikrinės reikšmės (nulinės, neigiamos ir teigiamos) ir ištirta jų priklausomybė nuo parametro N (intervalo padalinimų skaičius) reikšmės parinkimo. Išanalizuoti atvejai ir sritys, kuriose atsiranda kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

Daugelis mokslininkų nagrinėja įvairius nelokaliuosius uždavinius su pastoviais koeficientais. Tik nedidelėje dalyje darbų galima aptikti uždavinius su kintamais koeficientais. Yra ištirti tik kai kurie atskiri atvejai. Taigi yra neaiški diferencialinio uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis tikrinių reikšmių struktūra. Šioje disertacijoje analizuojamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis ir kintamais koeficientais, kai kintami koeficientai yra nelokaliosiose sąlygose arba diferencialinėje lygtyje. Spektro struktūra nagrinėjama tiek analiziniu, tiek skaitiniu būdu. Įrodomos kai kurios tikrinių reikšmių savybės. Atliktas skaitinis eksperimentas kartotinių ir kompleksinių tikrinių reikšmių analizei.

Išnagrinėjus tikrinių reikšmių uždavinį, gauti rezultatai panaudojami skirtuminių schemų parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumo analizei. Stabilumo sąlygos apibrėžiamos ir įrodomos per tikrines šio uždavinio reikšmes.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Disertacijoje gauti rezultatai, t. y. tikrinių reikšmių uždavinio diferencialiniam operatoriui su įvairaus tipo nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro struktūros tyrimo rezultatai gali būti panaudojami sprendžiant daugiamačius tokio tipo uždavinius, taip pat nagrinėjant diferencialinio ir skirtuminio uždavinių sprendinio egzistavimą ir vienatį, skirtuminių lygčių sistemų sprendimui iteraciniais metodais bei skirtuminių schemų parabolinėms lygtims stabilumui tirti. Matematiniai modeliai su nelokaliosiomis sąlygomis svarbūs sprendžiant praktinius uždavinius iš fizikos, biochemijos, ekologijos ir kitų mokslo sričių.

Ginamieji teiginiai

- Diferencialinio ir skirtuminio operatorių su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro tyrimo metodika. Sąlygos, su kuriomis egzistuoja nulinė, neigiamos, teigiamos, taip pat kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.
- Gautų rezultatų apibendrinimas ir taikymas dvimačio elipsinio operatoriaus su integralinėmis sąlygomis spektro stuktūrai tirti.
- Skirtuminių schemų stabilumo parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis nagrinėjimo būdas.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai paskelbti 8 straipsniuose, iš jų 6 recenzuojamuose leidiniuose ir vienas jų yra referuojamas ISI Master Journal List duomenų bazėje. Autorės publikacijos pateiktos papildome sąraše „Autorės publikacijos disertacijos tema“.

Tarpiniai disertacijos rezultatai pristatyti šiose Lietuvos ir tarptautinėse mokslinėse konferencijose:

- R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. Diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis skaitiniai sprendimo metodai. // Lietuvos matematikų draugijos XLVI konferencija, Vilniaus universitetas, 2005 m. birželio 15–16 d., Vilnius, Lietuva.
- Ž. Jesevičiūtė. Diferencialinio operatoriaus su nelokaliąja integraline sąlyga spektro struktūra. //Matematika ir matematikos dėstymas – 2006, KTU, 2006 m. balandžio 6–7 d., Kaunas, Lietuva.
- Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. Eigenvalue problem for ordinary differential operator subject to integral conditions. // 11th International Conference Mathematical Modeling and Analysis, 2006 m. birželio 1–4 d., Jūrmala, Latvija.
- Ž. Jesevičiūtė. Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliąja integraline sąlyga. //Lietuvos matematikų draugijos XLVII konferencija, KTU, 2006 m. birželio 20–21 d., Kaunas, Lietuva.

- Ž. Jesevičiūtė. Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su integraline sąlyga. //Matematika ir matematikos dėstymas – 2007, KTU, 2007 m. balandžio 12–13 d., Kaunas, Lietuva.
- Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. The Eigenvalue problem for second-order differential operator subject to nonlocal conditions. // 12th International Conference Mathematical Modeling and Analysis, 2007 m., gegužės 30 – birželio 2, Trakai, Lietuva.
- Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. Nelokalusis tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su kintamais koeficientais. // Lietuvos matematikų draugijos XLVIII konferencija, VGTU, 2007 m. birželio 27–28 d., Vilnius, Lietuva.
- Ž. Jesevičiūtė. Tikrinių reikšmių uždavinys skirtuminiam operatoriui su nelokaliąja sąlyga. //Matematika ir matematikos dėstymas – 2008, KTU, 2008 m. balandžio 2–3 d., Kaunas, Lietuva.
- Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. On the stability of difference schemes for parabolic equation with integral condition. // 13th International Conference Mathematical Modeling and Analysis, 2008 m., birželio 4–7 d., Tartu (Kaariku), Estija.
- Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. Parabolinės lygties su integraline sąlyga sprendimas skirtuminiu metodu. // Lietuvos matematikų draugijos XLIX konferencija, VDU, 2008 m. birželio 25–26 d., Kaunas, Lietuva.
- Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. The eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with variable coefficient subject to integral conditions. // 14th International Conference Mathematical Modeling and Analysis, 2009 m., gegužės 27–30, Daugavpils, Latvija.
- Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su kintamais koeficientais ir nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. // Lietuvos matematikų draugijos L konferencija, Matematikos ir Informatikos Institutas, 2009 m., birželio 18–19 d., Vilnius, Lietuva.

Taip pat skaityti pranešimai Matematikos ir informatikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus ir Diferencialinių lygčių skyriaus seminaruose.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, 6 skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Skyriai yra suskaidyti į poskyrius. Disertacijoje naudojama numeracija „skyrius.poskyris“, „skyrius.teiginys“, „skyrius.paveikslėlis“, „skyrius.lentelė“. Įvadas nėra kaip atskiras skyrius, todėl jo numerio nėra darbo formulių ir poskyrių numeracijoje. Formulės yra numeruojamos kiekviename skyriuje atskirai, t. y. „skyrius. numeris“.

Įvade aprašytas problemos formulavimas ir temos objektas, išanalizuotas temos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, uždaviniai, naudojama tyrimų metodika, mokslinis darbo naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai, darbo rezultatų aprobavimas bei aptarta disertacijos stuktūra.

Pirmajame skyriuje suformuluojamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis (Čiupaila *et al.* 2003, 2004)

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda u = 0, 0 < x < 1, \tag{26}$$

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{27}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x. \tag{28}$$

Tiriama šio uždavinio spektro struktūra. Nagrinėjami atskiri uždavinio variantai su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis. Analizuojama, kaip šio uždavinio tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos priklauso nuo nelokaliųjų sąlygų parametrų γ_1 ir γ_2 reikšmių. Tiriama integravimo rėžių įtaka tikrinių reikšmių pasiskirstymui. Suformuluotos išvados apie nulinės, neigiamų ir teigiamų tikrinių reikšmių egzistavimą. Ištirti atvejai, kada atsiranda kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

Antrajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys skirtuminiu atveju. Uždavinys (26)–(28) suvedamas į skirtuminių lygčių sistemą (Jesevičiūtė 2006, 2007)

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0, i = 1, 2, ..., N-1, \tag{29}$$

$$u_0 = \gamma_1 h \left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right), \tag{30}$$

$$u_N = \gamma_2 h \left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right). \tag{31}$$

Pateikiama išsami šio uždavinio tikrinių reikšmių analizė. Suformuluotos ir įrodytos lemos apie nulinės, neigiamų ir teigiamų tikrinių reikšmių egzistavimą bei ištirta jų priklausomybė nuo parametrų γ_1, γ_2 ir N (intervalo padalinimų skaičius) reikšmių parinkimo. Gauti rezultatai lyginami su pirmajame skyriuje aptartomis diferencialinio operatoriaus atveju gautomis išvadomis.

Trečiajame skyriuje analizuojamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis sąlygomis ir kintamais koeficientais integralinėse sąlygose (Jesevičiūtė 2008, 2009; Jachimavičienė *et al.* 2009)

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda u = 0, 0 < x < 1, \tag{32}$$

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 \alpha(x) u(x) \mathrm{d}x, \tag{33}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 \beta(x) u(x) \mathrm{d}x. \tag{34}$$

Išnagrinėta šio uždavinio spektro priklausomybė nuo nelokaliųjų integralinių sąlygų parametrų γ_1, γ_2, $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$. Išsamiai ištirtos nulinės tikrinės reikšmės egzistavimo sąlygos. Parametrų γ_1, γ_2 koordinačių sistemoje apibrėžiama hiperbolė – geometrinė vieta taškų, kuriuose egzistuoja tikrinė reikšmė $\lambda = 0$. Aptariami gauti teoriniai ir skaitinių eksperimentų rezultatai.

Ketvirtasis skyrius yra skirtas diferencialinei lygčiai su kintamais koeficientais. Šiuo atveju nagrinėjamas uždavinys

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda u = 0, 0 < x < 1, \tag{35}$$

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 u(x) \mathrm{d}x, \tag{36}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 u(x) \mathrm{d}x. \tag{37}$$

Analizuojama, kaip tikrinės reikšmės priklauso nuo funkcijos $p(x)$, esančios diferencialinėje lygtyje, tipo ir nuo parametrų γ_1, γ_2, esančių nelokaliosiose integralinėse sąlygose. Šiame skyriuje įrodomos kai kurios tikrinių reikšmių spektro savybės. Ypatingai didelis dėmesys skiriamas nulinei tikrinei reikšmei, nes ji teikia daug informacijos apie skirtuminių schemų parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumą. Aptariami atlikto skaitinio eksperimento rezultatai.

Atlikus išsamią tikrinių reikšmių uždavinio diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis analizę pirmuose keturiuose skyriuose, Penktajame ir šeštajame disertacijos skyriuose pateikiami šių uždavinių taikymai.

Penktajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas dvimatis atvejis, t. y. dvimatė elipsinio tipo diferencialinė lygtis su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, 0 < x < 1, \tag{38}$$

$$u(0, y) = \gamma_1 \int_0^1 u(x, y)\mathrm{d}x, \tag{39}$$

$$u(1, y) = \gamma_2 \int_0^1 u(x, y)\mathrm{d}x. \tag{40}$$

Ištirtos ir aprašytos tikrinių reikšmių savybės.

Šeštajame skyriuje pateikta parabolinių lygčių su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis skirtuminių schemų stabilumo analizė (Jesevičiūtė and Sapagovas 2008).

Nagrinėjamas uždavinys

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a < x < b,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{41}$$

$$u(a, t) = \int_a^b \alpha(x) u(x, t)\mathrm{d}x + \mu_1(t), \tag{42}$$

$$u(b, t) = \int_a^b \beta(x) u(x, t)\mathrm{d}x + \mu_2(t), \tag{43}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{44}$$

Tokie uždaviniai sutinkami kvazistatinėje tamprumo teorijoje nagrinėjant homogeninę izotropinę juostą $0 \leqslant x \leqslant 1$, kuri juda taip, kad slinkties vektorius yra lygiagretus Dekarto koordinačių sistemos abscisių ašiai. Šio uždavinio stabilumo analizė yra paremta skirtuminės lygčių sistemos matricos spektro analize. Gautos skirtuminės schemos stabilumo sąlygos yra naujos ir iš esmės skiriasi nuo daugelio kitų autorių gautų stabilumo sąlygų. Atliktas skaitinis eksperimentas, kurio pagalba pateiktas išsamus skirtuminės lygčių sistemos matricos spektro savybių tyrimas.

Išvadose apibendrinti tyrimų rezultatai. Disertacijos pabaigoje pateikti naudotos literatūros bei autorės publikacijų sąrašai.

Padėka

Nuoširdžiai dėkoju darbo vadovui prof. habil. dr. Mifodijui Sapagovui už vadovavimą disertaciniam darbui, skirtą laiką ir energiją; doc. dr. Artūrui Štikonui, prof. dr. Vytautui Kleizai ir dr. Sigitai Pečiulytei už vertingas pastabas ir patarimus, padėjusius patobulinti disertaciją; visam Matematikos ir informatikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus kolektyvui už pagalbą rašant disertaciją; kolegoms iš Kauno Medicinos universiteto Fizikos, matematikos ir biofizikos katedros bei visam Vytauto Didžiojo universiteto Matematikos ir statistikos katedros kolektyvui už moralinį palaikymą. Ačiū visiems artimiesiems ir draugams už visokeriopą pagalbą, paramą ir supratimą.

1

Tikrinių reikšmių uždavinys vienmačiam diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

1.1. Tikrinių reikšmių uždavinys vienmačiam diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

Tikrinių reikšmių uždavinį diferencialinėms lygtims su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis nagrinėjo B. Cahlon, D.M. Kulkarni ir P. Shi (1995), G. Infante (1995), S. Pečiulytė ir A. Štikonas (2007a), S. Pečiulytė, O. Štikonienė ir A. Štikonas (2004, 2005, 2008), B. Bandyrskii, I. Lazurchak, V. Makarov ir M. Sapagovas (2006), M. Sapagovas (2005, 2007, 2008).

Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai pasklebti straipsniuose (Čiupaila *et al.* 2003, 2004). Vėliau už šiuos darbus pasirodžiusiame straipsnyje S. Pečiulytė, A. Štikonas ir O. Štikonienė (2005) nagrinėja Šturmo ir Liuvilio uždavinį

$$-u'' = \lambda u, \quad x \in (0,1) \tag{1.1}$$

su viena klasikine kraštine sąlyga

$$u(0) = 0 \tag{1.2}$$

ir kita nelokaliąja integraline sąlyga

$$u(1) = \gamma \int_0^{\xi} u(x)\mathrm{d}x, \quad \text{(1 atv.)} \tag{1.3}$$

$$u(1) = \gamma \int_{\xi}^{1} u(x)\mathrm{d}x, \quad \text{(2 atv.)} \tag{1.4}$$

su parametrais $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ ir $\xi \in [0, 1]$, čia $\overline{\mathbb{C}}$ – išplėstinė kompleksinių skaičių aibė $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ištirta šių uždavinių (1.1), (1.2), (1.3) ir (1.1), (1.2), (1.4) realiosios spektro dalies priklausomybė nuo parametrų γ ir ξ. Šis uždavinys abiem atvejais turi vieną nulinę tikrinę reikšmę, kai parametras $\gamma = \gamma_0$, $\gamma_0 = \frac{2}{\xi^2}$ (1 atv.); $\gamma_0 = \frac{2}{1-\xi^2}$ (2 atv.). Taip pat egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, kai $\gamma > \gamma_0$. Gauta, kad teigiamos spektrų dalys yra skirtingos realiesiems γ. Šiam uždaviniui, 2 atveju, egzistuoja tik realiosios tikrinės reikšmės; 1 atveju kai kuriems realiesiems γ gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

Pirmajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Tiriami atskiri šio uždavinio atvejai su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis. Surandamos tikrinės funkcijos ir tikrinės reikšmės. Analizuojama, kaip šio uždavinio tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos priklauso nuo parametrų γ_1 ir γ_2 iš nelokaliųjų integralinių sąlygų reikšmių. Suformuluotos ir įrodytos nulinės, neigiamų ir teigiamų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygos. Ištirti atvejai, kada atsiranda kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

1.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys vienmačiam diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda u = 0, 0 < x < 1, \tag{1.5}$$

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{1.6}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

Šiame uždavinyje γ_1, γ_2 yra žinomi parametrai (realieji skaičiai), λ – nežinomas parametras, o $u(x)$ – nežinoma funkcija. Tos parametro λ reikšmės, kurioms esant (1.5)–(1.7) tikrinių reikšmių uždavinys turi netrivialų sprendinį $u(x) \not\equiv 0$, vadinamos uždavinio tikrinėmis reikšmėmis, o pats netrivialus sprendinys – tikrine funkcija.

Tirsime diferencialinio operatoriaus su dviem nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro struktūrą. Spektru vadiname visų tikrinių reikšmių visumą. Atskirais atvejais išrašysime tikrines reikšmes λ ir tikrines funkcijas $u(x)$. Taip pat analizuosime parametrų γ_1, γ_2 įtaką tikrinių reikšmių pasiskirstymui.

Pastebėsime, kad tuo atveju, kai $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, turime klasikinį atvejį. Tada tiriamo (1.5)–(1.6) uždavinio tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos yra gerai žinomos ir išnagrinėtos (Samarskii 2001)

$$\lambda_k = (\pi k)^2, \qquad u_k(x) = \sin(\pi k x), k \in \mathbb{N}.$$

Šiame skyriuje išnagrinėtas ir kitas tikrinių reikšmių uždavinys, analogiškas (1.5)–(1.7) uždaviniui, kai nelokaliosiose sąlygose integravimo intervalas $(0, 1)$ pakeistas integravimo intervalu $(1/4, 3/4)$.

1.3. Diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro struktūra

1.3.1. Diferencialinio operatoriaus su viena nelokaliąja integraline sąlyga tikrinių reikšmių uždavinys

Tirsime (1.5) tikrinių reikšmių uždavinį su viena klasikine ir kita nelokaliąja integraline sąlygomis

$$u(0) = 0, \tag{1.8}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{1.9}$$

čia γ_2 yra duotas parametras (realus skaičius).

Ieškosime šio uždavinio tikrinių reikšmių. Tuo tikslu bus nagrinėjami trys atskiri atvejai, t. y. ieškosime nulinės, neigiamų ir teigiamų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygų.

1 atvejis: $\lambda = 0$. Pirmiausia apibrėšime sąlygas, kada (1.5), (1.8), (1.9) uždavinio tikrinė reikšmė yra lygi nuliui.

Šiuo atveju iš (1.5) diferencialinės lygties ir (1.8) kraštinės sąlygos turime, kad $u(x) = Cx$. Įrašę šią išraišką į (1.9) nelokalią integralinę sąlygą, gauname

$$C\left(1 - \frac{\gamma_2}{2}\right) = 0.$$

Taigi darome tokias išvadas: jei $\gamma_2 \neq 2$, tai tuo atveju, kai $\lambda = 0$, egzistuoja tik trivialus sprendinys; jei $\gamma_2 = 2$, tai $\lambda = 0$ yra (1.5), (1.8), (1.9) diferencialinio uždavinio tikrinė reikšmė, o $u(x) = Cx$ yra tikrinė funkcija, kur C – bet koks skaičius.

2 atvejis: $\lambda < 0$. Tirsime neigiamas tikrines reikšmes.

Įveskime pažymėjimą $\beta = \sqrt{-\lambda} > 0$, t. y. $\lambda = -\beta^2$. Šiuo atveju iš (1.5) lygties ir (1.8) kraštinės sąlygos turime, kad

$$u(x) = C\mathrm{sh}(\beta x). \tag{1.10}$$

Šią išraišką įrašome į (1.9) integralinę sąlygą ir, atlikę pertvarkymus, gauname

$$C\mathrm{sh}\frac{\beta}{2}\left(\mathrm{ch}\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma_2}{\beta}\mathrm{sh}\frac{\beta}{2}\right) = 0.$$

Iš čia darome išvadą, kad $C \neq 0$, jei $\mathrm{sh}\frac{\beta}{2} = 0$ arba $\mathrm{ch}\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\mathrm{sh}\frac{\beta}{2} = 0$.

Iš lygybės $\mathrm{sh}\frac{\beta}{2} = 0$ seka, kad $\beta = 0$, t. y. $\lambda = 0$, tačiau mes ieškome neigiamų tikrinių reikšmių $\lambda < 0$. Taigi šiuo atveju, kai $\lambda < 0$, gauname kad, (1.5), (1.8), (1.9) uždavinio (1.10) sprendinys egzistuoja tik tada, kai β yra lygties

$$\mathrm{ch}\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma_2}{\beta}\mathrm{sh}\frac{\beta}{2} = 0$$

šaknis.

Panagrinėkime, kada ir kiek šaknų turi ši lygtis. Pirmiausia šią lygtį pertvarkome į sekančio pavidalo lygtį

$$\mathrm{th}\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{\gamma_2}. \tag{1.11}$$

Remiantis funkcijos $\mathrm{th}\dfrac{\beta}{2}$ savybėmis, darome išvadas, kad (1.11) lygtis turi tik vieną $\beta = 0$ šaknį, kai $-\infty < \gamma_2 \leq 2$. Kai $\gamma_2 > 2$, egzistuoja trys (1.11) lygties šaknys: $\beta = 0$, $\bar{\beta} > 0$ ir $-\bar{\beta} < 0$. Kai $\beta = 0$, tai turime atvejį $\lambda = 0$, tuo tarpu šaknims $\pm\bar{\beta}$ turime, kad $\bar{\lambda} = -(\pm\bar{\beta})^2 < 0$. Taigi, kai $\gamma_2 > 2$, (1.5), (1.8), (1.9) uždavinio tikrinė reikšmė $\bar{\lambda} < 0$ egzistuoja, ir $\sqrt{-\bar{\lambda}} = \bar{\beta}$ yra vienintelė teigiama (1.11) lygties šaknis. Atitinkama tikrinė funkcija apibrėžiama (1.10) formule, kur $\beta = \sqrt{-\lambda}$. Konkrečiais atvejais neigiamos tikrinės reikšmės atsiradimą galime stebėti 1.1 paveiksle, kai $\gamma_2 > 2$.

3 atvejis: $\lambda > 0$. Aprašysime trečiąjį atvejį, t. y. nagrinėsime teigiamas tikrines reikšmes.

Iš (1.5) diferencialinės lygties ir (1.8) kraštinės sąlygos seka, kad

$$u(x) = C\sin(\alpha x). \tag{1.12}$$

Šią išraišką įrašius į (1.9) nelokalią sąlygą, kaip ir antru atveju, gauname lygtį

$$C\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma_2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Sąlyga $C \neq 0$ tenkinama, jei

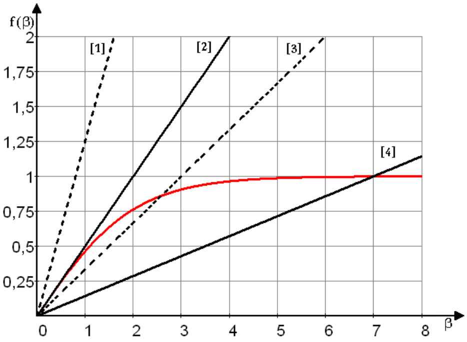
$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \tag{1.13}$$

arba

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\gamma_2}, \tag{1.14}$$

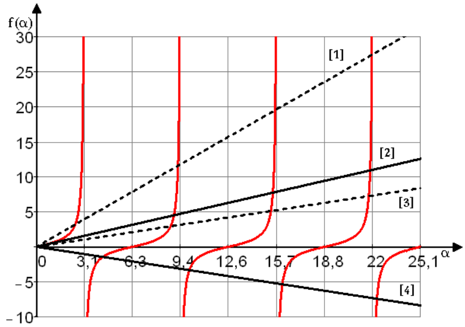
čia γ_2 – žinomas parametras, $\alpha = \sqrt{\lambda} > 0$.

Iš (1.14) seka, kad visoms γ_2 reikšmėms egzistuoja be galo daug teigiamų tikrinių reikšmių $\lambda_k = \alpha_k^2 > 0$, $k = 1, 2, ...$, o atitinkama tikrinė funkcija apibrėžiama (1.12) lygybe. Būtent, kai $\gamma_2 \geq 2$, (1.14) lygtis turi po vieną teigiamą šaknį $\alpha_k > 0$ kiekviename intervale $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k = 1, 2, 3, ...$; kai $0 < \gamma_2 < 2$, tai ši lygtis turi dar vieną papildomą šaknį intervale $(0, \pi)$; kai $\gamma_2 < 0$, tai (1.14) lygties šaknys $\alpha_k > 0$ yra kiekviename iš intervalų $((2k-1)\pi, 2k\pi)$,



1.1 pav. Funkcijų $f(\beta) = \text{th}(\beta/2)$ ir $g(\beta) = \beta/\gamma_2$ grafikai, čia kreivės [1], ... , [4], kai $\gamma_2 = 0,8; 2; 3; 7$

Fig. 1.1. Graphs of functions $f(\beta) = \text{th}(\beta/2)$ and $g(\beta) = \beta/\gamma_2$, where curves [1], ... , [4], then $\gamma_2 = 0,8; 2; 3; 7$



1.2 pav. Funkcijų $f(\beta) = \text{th}(\beta/2)$ ir $g(\beta) = \beta/\gamma_2$ grafikai, čia kreivės [1], ... , [4], kai $\gamma_2 = 0,8; 2; 3; 7$

Fig. 1.2. Graphs of functions $f(\beta) = \text{th}(\beta/2)$ and $g(\beta) = \beta/\gamma_2$, where curves [1], ... , [4], then $\gamma_2 = 0,8; 2; 3; 7$

$k = 1, 2, 3, \ldots.$ Kai $\gamma_2 = 0$, tai $\alpha_k = (2k-1)\pi$, $k = 1, 2, 3, \ldots.$ Kitais atvejais $\lambda_k = \alpha_k^2$.

Gauname, kad bet kokiai parametro γ_2 reikšmei egzistuoja be galo daug (1.5), (1.8), (1.9) uždavinio tikrinių reikšmių, kurios yra gaunamos iš (1.14) lygties. Grafiškai teigiamos tikrinės reikšmės atvaizduotos 1.2 paveiksle. Grafikų susikirtimo taškus atitinkančios α_k reikšmės apibrėžia tikrines reikšmes $\lambda_k = \alpha_k^2$. Čia pateiktos tikrinės reikšmės, esančios intervale $[0, 8\pi]$. Galime pastebėti, kad, keičiantis γ_2 reišmei, kinta teigiamų tikrinių reikšmių skaičius. Iš (1.13) lygties taip pat gauname be galo daug tikrinių reikšmių $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots.$ Šios tikrinės reikšmės nepriklauso nuo parametro γ_2 reikšmės.

Ištyrę šiuos tris atvejus, galime padaryti apibendrintas išvadas.

- Nagrinėdami (1.5), (1.8), (1.9) diferencialinį uždavinį gauname, kad bet kuriai γ_2 reikšmei egzistuoja be galo daug teigiamų tikrinių reikšmių $\lambda_k = \alpha_k^2$, $k = 1, 2, \ldots$, priklausančių nuo parametro γ_2 reikšmės. Šios tikrinės reikšmės yra gaunamos iš lygties

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\gamma_2}$$

ir atitinkamos tikrinės funkcijos apibrėžiamos lygybe

$$u_k(x) = C\sin\sqrt{\lambda_k}x, k = 1, 2, ...$$

Tikrinės reikšmės $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 1, 2, ...$, gautos iš (1.13) lygties, nepriklauso nuo parametro γ_2.

- Kai $-\infty < \gamma_2 < 2$, tai nėra kitų tikrinių reikšmių, išskyrus čia apibrėžtas teigiamas tikrines reikšmes.
- Kai $\gamma_2 = 2$, tai $\lambda_0 = 0$ yra uždavinio (1.5), (1.8), (1.9) tikrinė reikšmė ir atitinkama tikrinė funkcija $u_0(x) = x$.
- Kai $2 < \gamma_2 < \infty$, tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė $\bar{\lambda} = -\bar{\beta}^2 < 0$. Ji gaunama iš (1.11) lygties, kuri turi vieną teigiamą šaknį. Atitinkamai tikrinė funkcija yra $\bar{u}(x) = \mathrm{sh}\bar{\beta}x$.

1.3.2. Diferencialinio operatoriaus su modifikuota integraline sąlyga tikrinių reikšmių uždavinys

Tirsime tikrinių reikšmių uždavinį (1.5) lygčiai su viena klasikine ir kita nelokaliąja integraline sąlygomis. Čia vietoje (1.9) nelokaliosios sąlygos imkime kitą sąlygą, kurioje integralo rėžiai nesutampa su intervalo $(0, 1)$ kraštiniais taškais:

$$u(1) = \gamma_2 \int_{1/4}^{3/4} u(x)\mathrm{d}x, \tag{1.15}$$

čia γ_2 yra duotas parametras.

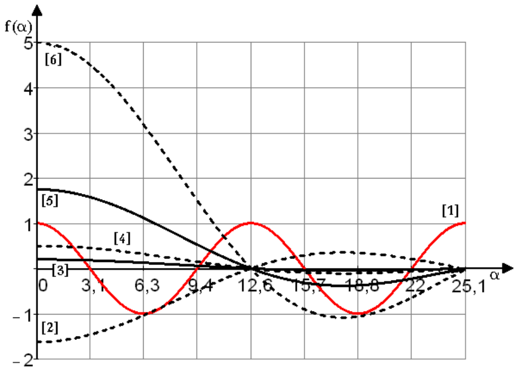
Taigi spręsime (1.5), (1.8), (1.15) uždavinį. Atlikus analogišką tyrimą prieš tai aptartam uždaviniui, buvo gautos sekančios išvados.

- (1.5), (1.8), (1.15) diferencialinis uždavinys turi be galo daug teigiamų tikrinių reikšmių $\lambda_k = \alpha_k^2$, $k = 1, 2, ...$, priklausančių nuo parametro γ_2 reikšmės; α_k yra lygties (1.3 paveikslas)

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma_2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{4} \tag{1.16}$$

šaknys; atitinkamos tikrinės funkcijos apibrėžiamos lygybe

$$u_k(x) = C\sin\sqrt{\lambda_k}x, k = 1, 2, ...$$



1.3 pav. Funkcijų $f(\alpha) = \cos(\alpha/2)$ (kreivė [1]) ir $g(\alpha) = (\gamma/\alpha)\sin(\alpha/4)$ grafikai, čia kreivės [2], ... , [6], kai $\gamma = -6,5; 0,8; 2; 7; 20$. Intervale $[0, 8\pi]$
Fig. 1.3. Graphs of functions $f(\alpha) = \cos(\alpha/2)$ (curve [1]) and $g(\alpha) = (\gamma/\alpha)\sin(\alpha/4)$, where curves [2], ... , [6], then $\gamma = -6,5; 0,8; 2; 7; 20$ in interval $[0, 8\pi]$

1.1 lentelė. (1.5), (1.8), (1.15) uždavinio tikrinės reikšmės
Table 1.1. The eigenvalues of the problem (1.5), (1.8), (1.15)

γ_2	0	1	4	18	$18,852$	$18,9896$	$18,995$
λ_0	$\pi^2 = 9,869$	7,149	0	-23,5	-24,934	-24,937	-24,937
λ_1	$(2\pi)^2 = 39,478$	39,478	39,478	39,478	39,478	39,478	39,478
λ_2	$(3\pi)^2 = 88,826$	91,422	98,359	118,483	119,534	119,536	119,536
λ_3	$(4\pi)^2 = 157,914$	157,914	157,914	157,914	157,914	157,914	157,914
λ_4	$(5\pi)^2 = 246,74$	248,805	258,102	335,261	363,017	364,17	364,177+0,412i
λ_5	$(6\pi)^2 = 355,306$	355,306	355,306	355,306	355,306	355,306	355,306
λ_6	$(7\pi)^2 = 483,611$	477,748	486,612	392,950	365,332	364,17	364,177-0,412i
λ_7	$(8\pi)^2 = 631,655$	631,655	631,655	631,655	631,655	631,655	631,655
λ_8	$(9\pi)^2 = 799,438$	788,441	780,666	750,31	748,319	748,315	748,315

Tikrinės reikšmės $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 1, 2, ...$, gautos iš lygties $\sin\dfrac{\alpha}{2} = 0$, nepriklauso nuo parametro γ_2.

- Kai $-\infty < \gamma_2 < 4$, tai nėra kitų tikrinių reikšmių, išskyrus čia apibrėžtas teigiamas tikrines reikšmes.
- Kai $\gamma_2 = 4$, tai $\lambda_0 = 0$ yra (1.5), (1.8), (1.15) uždavinio tikrinė reikšmė

1.2 lentelė. (1.5), (1.8), (1.15) uždavinio tikrinės reikšmės (1.1 lentelės tęsinys)
Table 1.2. The eigenvalues of the problem (1.5), (1.8), (1.15)

γ_2	$18,9896$	$18,995$	43	$45,19$	$45,1933505$	$45,199$
λ_0	-24,93	-24,94	-50,32			
λ_1	39,48	39,48	39,48			
λ_2	119,54	119,54	134,32			
λ_3	157,92	157,92	157,92			
λ_4	364,17	364,18+0,412i	$364,83{+}138,317i$			
λ_5	355,31	355,31	355,31			
λ_6	364,17	364,18-0,412i	$364,83{-}138,317i$			
λ_7	631,66	631,66	631,66			
λ_8	748,32	748,32	713,67			
λ_9			986,96	986,96	986,96	986,96
λ_{10}			1256,16	1258,95	1258,95	1258,96
λ_{11}			1421,22	1421,22	1421,22	1421,22
λ_{12}			1836,71	1894,44	1896,79	$1896,80{+}2,912i$
λ_{13}			1934,44	1934,44	1934,44	1934,44
λ_{14}			1956,71	1899,22	1896,79	$1896,80{-}2,912i$

ir atitinkamai tikrinė funkcija $u_0(x) = x$.

- Kai $4 < \gamma_2 < \infty$, tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė $\bar{\lambda} = -\bar{\beta}^2 < 0$; $\bar{\beta}$ yra lygties
$$\mathrm{ch}\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma_2}{\beta}\mathrm{sh}\frac{\beta}{4}, \tag{1.17}$$
teigiamoji šaknis. Atitinkamai tikrinė funkcija yra $\bar{u}(x) = \mathrm{sh}\bar{\beta}^2 x$.

Be to, tuo atveju, kai $4 < \gamma_2 < \infty$, naudojant skaitinį eksperimentą nustatyta, kad gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

Kaip pavyzdį pateiksime vieną iš atvejų, kada (1.5), (1.8), (1.15) uždavinys turi kartotinę tikrinę reikšmę. Sprendžiame (1.16) lygtį ir ieškome teigiamų tikrinių reikšmių intervale $[0, 8\pi]$. Gauname, kad šiame intervale lygtis turi keturias teigiamas skirtingas šaknis, kai $0 < \gamma_2 < 4$; tris teigiamas skirtingas šaknis ir šaknį $\lambda_0 = 0$, kai $\gamma_2 = 4$; tris teigiamas skirtingas šaknis, kai $4 < \gamma_2 < \gamma^*$, čia $\gamma^* \approx 18.99$; vieną teigiamą ir vieną kartotinę šaknis, kai $\gamma_2 = \gamma^*$; vieną teigiamą šaknį ir dvi kompleksines šaknis, kai $\gamma^* < \gamma_2$.

Daugiau skaičiavimo rezultatų pateikta 1.1 ir 2.1 lentelėse. Pateiktos teigiamos tikrinės reikšmės, kurias gauname iš (1.16) lygties, neigiama tikrinė reikšmė iš (1.17) lygties ir taip pat kiekvienu atveju egzistuoja pastoviosios tikrinės reikšmės, gautos iš (1.13) lygties. 1.1 lentelėje galime stebėti atsiradimą kartotinės tikrinės reikšmės, kuri vėliau, keičiant parametro γ_2 reikšmę, pereina į dvi kompleksines tikrines reikšmes. 2.1 lentelėje pateikti rezultatai, kai buvo tęsiama ta pati procedūra ir atsiranda dar viena kompleksinių tikrinių reikšmių pora.

1.3.3. Diferencialinio operatoriaus su dviem nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis tikrinių reikšmių uždavinys

Šiame poskyryje tirsime (1.5) tikrinių reikšmių uždavinį su dviem nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{1.18}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{1.19}$$

čia γ_1, γ_2 yra duoti parametrai (realieji skaičiai).

Naudodami analogišką technologiją, tiriame tris tikrinių reikšmių atvejus (nulinės, neigiamų ir teigiamų).

1 atvejis: $\lambda = 0$. Bendrąjį diferencialinės lygties sprendinį $u(x) = c_1 + c_2 x$ įrašome į (1.18), (1.19) nelokaliąsias sąlygas ir, atlikę pertvarkymus, gauname lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais c_1 ir c_2

$$\begin{cases} (1-\gamma_1)c_1 - \dfrac{\gamma_1}{2}c_2 = 0, \\[2ex] (1-\gamma_2)c_1 + \Big(1 - \dfrac{\gamma_2}{2}\Big)c_2 = 0. \end{cases}$$

Iš tiesinės algebros žinome, kad homogeninė lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos determinantas lygus 0, t. y.

$$D = \begin{vmatrix} 1-\gamma_1 & -\dfrac{\gamma_1}{2} \\[2ex] 1-\gamma_2 & 1-\dfrac{\gamma_2}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Iš to seka, kad $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$. Taigi, jei $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 2$, tai $\lambda = 0$ nėra uždavinio tikrinė reikšmė, t. y. sprendinys yra trivialus. Jei $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$, tai $\lambda = 0$ yra

(1.5), (1.18), (1.19) diferencialinio uždavinio tikrinė reikšmė su atitinkama tikrine funkcija

$$u(x) = 1 + \frac{2(1-\gamma_1)}{\gamma_1} x.$$

2 atvejis: $\lambda < 0$. Šiuo atveju bendrasis (1.5) lygties sprendinys yra

$$u(x) = c_1 \mathrm{ch}\beta x + c_2 \mathrm{sh}\beta x, \quad \beta = \sqrt{-\lambda} > 0. \tag{1.20}$$

Šią išraišką įrašome į (1.18), (1.19) integralines sąlygas ir, atlikę pertvarkymus, gauname

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \gamma_1 \dfrac{\mathrm{sh}\beta}{\beta} & -\gamma_1 \dfrac{\mathrm{ch}\beta - 1}{\beta} \\ \mathrm{ch}\beta - \gamma_2 \dfrac{\mathrm{sh}\beta}{\beta} & \mathrm{sh}\beta - \gamma_2 \dfrac{\mathrm{ch}\beta - 1}{\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Atlikę skaičiavimus, turime lygtį

$$\mathrm{th}\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2}. \tag{1.21}$$

(1.21) lygtis turi vieną teigiamą šaknį $\bar{\beta}$, kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$. Iš to seka, kad (1.5), (1.18), (1.19) nelokalusis uždavinys turi neigiamą tikrinę reikšmę $\bar{\lambda} = -(\bar{\beta})^2$. Atitinkama tikrinė funkcija apibrėžiama (1.20) formule, kur $\beta = \sqrt{-\lambda}$.

3 atvejis: $\lambda > 0$. Nagrinėsime teigiamas tikrines reikšmes. Bendrasis (1.5) lygties sprendinys yra

$$u(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x, \quad \alpha = \sqrt{\lambda} > 0. \tag{1.22}$$

Šią išraišką įrašome į (1.18), (1.19) nelokaliąsias sąlygas ir gauname lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais c_1 ir c_2

$$\begin{cases} \left(1 - \gamma_1 \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right) c_1 + \dfrac{\gamma_1(\cos\alpha - 1)}{\alpha} c_2 = 0, \\ \left(\cos\alpha - \gamma_2 \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right) c_1 + \left(\sin\alpha + \dfrac{\gamma_2(\cos\alpha - 1)}{\alpha}\right) c_2 = 0. \end{cases}$$

Vėl determinantą prilyginę nuliui ir atlikę skaičiavimus, gauname lygtį, iš kurios galime gauti teigiamas tikrines reikšmes

$$\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\Big) = 0. \tag{1.23}$$

Pertvarkę šią lygtį turime dvi lygtis, iš kurių gaunamos šio uždavinio teigiamos tikrinės reikšmės

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \tag{1.24}$$

ir

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\gamma_1+\gamma_2}, \tag{1.25}$$

čia γ_1, γ_2 – žinomi parametrai, $\alpha = \sqrt{\lambda} > 0$.

Galime užrašyti bendras išvadas:

- Bet kokiai parametro $\gamma_1 + \gamma_2$ reikšmei egzistuoja be galo daug šio uždavinio tikrinių reikšmių, kurios yra gaunamos iš (1.25) lygties, t. y. šios tikrinės reikšmės priklauso nuo parametro $\gamma_1 + \gamma_2$. Iš (1.24) lygties gauname be galo daug tikrinių reikšmių $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 1, 2, ...$, kurios nepriklauso nuo parametro $\gamma_1 + \gamma_2$ reikšmės.
- Kai $-\infty < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$, tai nėra kitų tikrinių reikšmių, išskyrus čia apibrėžtas teigiamas tikrines reikšmes.
- Kai $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$, tai λ yra (1.5), (1.18), (1.19) uždavinio tikrinė reikšmė ir atitinkama tikrinė funkcija $u_0(x) = x$.
- Kai $2 < \gamma_1 + \gamma_2 < \infty$, tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė $\bar{\lambda} = -\bar{\beta}^2 < 0$. Ji gaunama iš (1.21) lygties, kuri turi vieną teigiamą šaknį. Atitinkama tikrinė funkcija yra $\bar{u}(x) = \mathrm{sh}\bar{\beta}x$.

(1.5), (1.18), (1.19) diferencialinio uždavinio neigiamos ir teigiamos tikrinės reikšmės pavaizduotos atitinkamai 1.1 ir 1.2 paveiksluose (intervale $[0, 8\pi]$). Tik šiuo atveju vietoje parametro γ_2 turime $\gamma_1 + \gamma_2$.

Pagrindinė išvada: Diferencialinio operatoriaus su dviem nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, apibrėžtomis (1.18), (1.19), spektras priklauso ne nuo parametrų γ_1, γ_2 atskirai, o nuo vieno parametro $\gamma_1 + \gamma_2$.

1.4. Pirmojo skyriaus išvados

- Ištyrus (1.5), (1.8), (1.9) uždavinį gauta, kad kai $-\infty < \gamma_2 < 2$, tai visos realios tikrinės reikšmės yra teigiamos; kai $\gamma_2 = 2$, tai $\lambda = 0$

yra šio uždavinio tikrinė reikšmė ir kitos teigiamos tikrinės reikšmės; kai $2 < \gamma_2 < \infty$, tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė $\bar{\lambda} = -\bar{\beta}^2 < 0$ ir kitos teigiamos tikrinės reikšmės.

- Ištirta (1.5), (1.8), (1.15) diferencialinio operatoriaus su viena klasikine ir kita nelokaliąja integraline sąlyga tikrinių reikšmių priklausomybė nuo parametro γ_2 reikšmės ir integravimo rėžių parinkimo. Pastebėta, kad, integruojant ne visame intervale $[0, 1]$, o tik jo dalyje, gali atsirasti kartotinių ir kompleksinių tikrinių reikšmių.

- Išanalizavus (1.5), (1.18), (1.19) diferencialinį uždavinį su dviem nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis gauta, kad kai $-\infty < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$, tai visos realios tikrinės reikšmės yra teigiamos; kai $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$, tai $\lambda = 0$ yra šio uždavinio tikrinė reikšmė ir kitos tikrinės reikšmės yra teigiamos; kai $2 < \gamma_1 + \gamma_2 < \infty$, tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė $\bar{\lambda} = -\bar{\beta}^2 < 0$ ir kitos tikrinės reikšmės yra teigiamos. Šio uždavinio spektras priklauso tik nuo parametro $\gamma_1 + \gamma_2$, o ne nuo kiekvieno jų γ_1, γ_2 atskirai.

2

Skirtuminis tikrinių reikšmių uždavinys su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

2.1. Skirtuminis tikrinių reikšmių uždavinys su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

Skirtumines schemas diferencialiniams uždaviniams su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis nagrinėjo R. Čiegis (2005, 2006); R. Čiegis ir M. Meilūnas (1993); M. Dehghan (2003); G. Ekolin (1991) ir kiti autoriai.

M. Sapagovo ir R. Čiegio straipsnyje (1987a) rastos vienintelio sprendinio egzistavimo sąlygos. Tikrinės reikšmės tiriamos vienmačio ir dvimačio skirtuminio uždavinio atvejais (Sapagovas 2005). M. Dehghan darbe (2003) skirtuminės schemos naudojamos ir nagrinėjamos apytiksliam sprendiniui rasti.

N. I. Ionkin ir E. A. Valikova (1996) nagrinėjo diferencialinį uždavinį su kraštinėmis sąlygomis

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\Big) - q(x)U(x) = -f(x),\\
&U(0) = U(1), \quad \frac{\mathrm{d}U(1)}{\mathrm{d}x} = 0,
\end{aligned}
$$

čia $f(x), q(x) \in C[0,1]$, $k(x) \in C^1[0,1]$, $0 < c_1 \le k(x) \le c_2$, $q(x) \ge 0$.

Straipsnyje skaitiškai tiriamas uždavinio spektras diferencialiniu ir skirtuminiu atvejais. Atliktas skaitinis eksperimentas su tam tikromis funkcijos $k(x)$ reikšmėmis. Išnagrinėta, su kokiomis nelokaliųjų sąlygų parametrų reikšmėmis gali egzistuoti kompleksinės tikrinės reikšmės.

Šiame disertacijos skyriuje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys skirtuminiam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Pateikiamas diferencialinio uždavinio suvedimas į algebrinį tikrinių reikšmių uždavinį. Nagrinėsime uždavinio spektro struktūrą ir parametrų iš nelokaliųjų integralinių sąlygų įtaką jos pokyčiams.

Pagrindiniai skyriaus rezultatai atspausdinti straipsniuose (Jesevičiūtė 2006, 2007).

2.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys paprastai diferencialinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda u = 0, 0 < x < 1, \tag{2.1}$$

$$u(0) = \gamma_0 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

$$u(1) = \gamma_1 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

su realiaisiais parametrais γ_0, γ_1. Tiriamame uždavinyje parametras λ yra tikrinė reikšmė, $u(x)$ – tikrinė funkcija, o γ_0, γ_1 – žinomi skaičiai.

Tirsime skirtuminio operatoriaus, atitinkančio šiam diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, spektro struktūrą. Atskirais atvejais rasime tikrines reikšmes $\lambda \in \mathbb{C}$ ir tikrines funkcijas $u(x)$. Nagrinėsime, kaip tokio uždavinio spektras priklauso nuo nelokaliųjų integralinių sąlygų parametrų γ_0, γ_1.

Skirtuminio operatoriaus tikrinės reikšmės yra labai svarbios nagrinėjant skirtuminių lygčių sistemos vienintelio sprendinio egzistavimą ir vienatį, parabolinių lygčių skirtuminių schemų stabilumą, skirtuminių lygčių sistemų iteracinių metodų konvergavimą.

2.3. Skirtuminio operatoriaus su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro struktūra

Užrašysime (2.1)–(2.3) diferencialiniam operatoriui atitinkantį skirtuminį uždavinį. Intervalą $[0,1]$ padaliname į N lygių dalių taškais $x_i = hi$, čia $i = 0, 1, ..., N$; $h = \frac{1}{N}$. Kiekviename taške antrąją išvestinę pakeičiame apytiksliai skirtumine išraiška. Atlikę šį pakeitimą kiekviename taške x_i, $i = 1, 2..., N-1$, gauname $N-1$ lygtį su $N+1$ nežinomuoju. Nelokalios integralinės sąlygos taškuose x_0 ir x_N pakeičiamos skirtuminėmis lygtimis pasinaudojus trapecijų formule (Čiegis and Būda 1997). Tuo būdu, sprendžiamą (2.1)–(2.3) uždavinį suvedame į skirtuminių lygčių sistemą

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0, i = 1, 2, ..., N-1, \tag{2.4}$$

$$u_0 = \gamma_0 h \left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right), \tag{2.5}$$

$$u_N = \gamma_1 h \left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right). \tag{2.6}$$

Mus domina šio skirtuminio uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis tikrinės reikšmės, t. y. tokios λ reikšmės, su kuriomis uždavinys (2.4)–(2.6) turi netrivialų (tapatingai nelygų nuliui: $u_i \not\equiv 0$) sprendinį.

Pastebėsime, kad (2.4)–(2.6) tikrinių reikšmių uždavinį skirtuminiam operatoriui galime užrašyti kaip tikrinių reikšmių $(N-1)$-osios eilės matricai. Tuo tikslu užrašykime (2.5), (2.6) sąlygas kaip dviejų lygčių sistemą su nežinomaisiais u_0, u_N:

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{h\gamma_0}{2}\right)u_0 - \dfrac{h\gamma_0}{2}u_N = h\gamma_0 \sum_{k=1}^{N-1} u_k, \\[2ex] -\dfrac{h\gamma_1}{2}u_0 + \left(1 - \dfrac{h\gamma_1}{2}\right)u_N = h\gamma_1 \sum_{k=1}^{N-1} u_k. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ši sistema turi vienintelį sprendinį, jei jos determinantas nelygus nuliui, t. y. jei

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{h\gamma_0}{2} & -\dfrac{h\gamma_0}{2} \\[2ex] -\dfrac{h\gamma_1}{2} & 1 - \dfrac{h\gamma_1}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{h}{2}(\gamma_0 + \gamma_1) \neq 0$$

arba

$$h \neq \frac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}. \tag{2.8}$$

Taigi (2.7) sistema turi vienintelį sprendinį, jei žingsnis h yra pakankamai mažas, t. y., jei

$$h < \frac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}.$$

Tarkime, kad (2.8) sąlyga išpildyta. Tada iš (2.7) sistemos išreiškiame u_0, u_N nežinomaisiais $u_1, u_2, ..., u_{N-1}$:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k u_k, \qquad u_N = \sum_{k=1}^{N-1} \beta_k u_k, \tag{2.9}$$

čia

$$\alpha_k = \frac{h\gamma_0}{D}, \qquad \beta_k = \frac{h\gamma_1}{D}.$$

Įrašę u_0, u_N išraiškas iš (2.9) lygybių į (2.4) lygtis, gauname vietoje (2.4)–(2.6) sistemos tikrinių reikšmių uždavinį $(N-1)$-osios eilės matricai A:

$$Au = \lambda u, \tag{2.10}$$

čia

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2-a_1 & -1-a_2 & -a_3 & \dots & -a_{N-1} \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & 2 & -1 \\ -b_1 & -b_2 & \dots & -1-b_{N-1} & 2-b_N \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}.$$

(2.4)–(2.6) tikrinių reikšmių uždavinys skirtuminiam operatoriui ir (2.10) tikrinių reikšmių uždavinys matricai yra ekvivalentūs, kai $h \neq \dfrac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}$, t. y. jų sprendiniai yra tie patys. Ši pastaba naudinga tuo, kad iš jos gaunama tokia išvada.

2.1 išvada. Kai $h \neq \dfrac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}$, tai: (2.4)–(2.6) tikrinių reikšmių uždavinys turi $(N-1)$ tikrinę reikšmę (realiąją ar kompleksinę).

Imdami vietoje sąlygos $h \neq \dfrac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}$ griežtesnę sąlygą $h < \dfrac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}$, šią išvadą galime suformuluoti kitais žodžiais:

(2.4)–(2.6) tikrinių reikšmių uždavinys turi $(N-1)$ tikrinę reikšmę, visoms pakankamai mažoms h reikšmėms, t. y., kai $h < \dfrac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}$.

Kadangi koeficientai esantys skirtuminėje lygtyje (2.4) yra pastovūs, rasime lygties bendrąjį sprendinį ir iš jo gausime konstantas reikalaudami, kad bendrasis sprendinys tenkintų nelokaliąsias integralines sąlygas (2.5), (2.6). Nagrinėjami trys atskiri atvejai.

1 atvejis: $\lambda = 0$.

Tirsime atvejį, ar (2.4)–(2.6) uždavinys turi netrivialųjį sprendinį $u(x) \not\equiv 0$, kai $\lambda = 0$. Kai $\lambda = 0$ bendrasis (2.4) lygties sprendinys yra Sapagovas (2007)

$$u_i = c_1 ih + c_2.$$

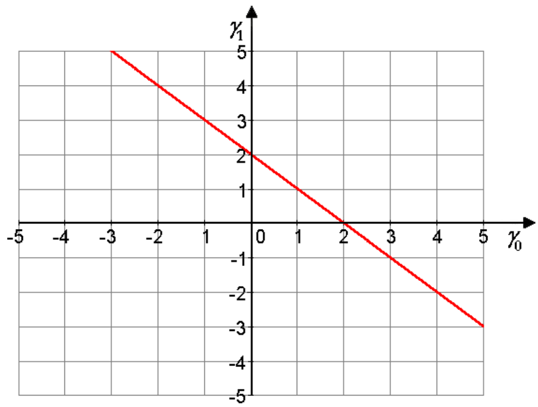
Įrašę šią išraišką į (2.5), (2.6) nelokaliąsias integralines sąlygas ir atlikę skaičiavimus, gauname

$$\begin{cases} -\dfrac{\gamma_0}{2}c_1 + (1-\gamma_0)c_2 = 0, \\[2ex] (1 - \dfrac{\gamma_1}{2})c_1 + (1-\gamma_1)c_2 = 0. \end{cases}$$

Ši sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos determinantas lygus nuliui, t. y.

$$D = \begin{vmatrix} -\dfrac{\gamma_0}{2} & 1-\gamma_0 \\[2ex] 1-\dfrac{\gamma_1}{2} & 1-\gamma_1 \end{vmatrix} = \frac{\gamma_0+\gamma_1}{2} - 1 = 0.$$

Iš to seka, kad (2.4)–(2.6) uždaviniui egzistuoja netrivialus sprendinys $u_i \not\equiv 0$



2.1 pav. Tiesės $\gamma_0 + \gamma_1 = 2$ grafikas
Fig. 2.1. Line $\gamma_0 + \gamma_1 = 2$

su $\lambda = 0$, kai $\gamma_0 + \gamma_1 = 2$. Taigi, su šia sąlyga egzistuoja tikrinė reikšmė $\lambda = 0$. Sąlygą $\gamma_0 + \gamma_1 = 2$ galima interpretuoti kaip tiesę koordinačių plokštumoje (γ_0, γ_1), atvaizduotą 2.1 paveiksle. Taigi taškuose (γ_0, γ_1), priklausančiuose šiai tiesei, egzistuoja (2.4)–(2.6) uždavinio tikrinė reikšmė $\lambda = 0$.

Taigi įrodėme lemą apie nulinės tikrinės reikšmės egzistavimą.

2.1 lema. Skaičius $\lambda = 0$ yra (2.4)–(2.6) skirtuminio uždavinio tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai

$$\gamma_0 + \gamma_1 = 2. \tag{2.11}$$

Pastebėsime, kad skirtuminiam operatoriui (2.11) sąlyga sutampa su tikrinės reikšmės $\lambda = 0$ egzistavimo sąlyga diferencialiniam operatoriui.

2 atvejis: $\lambda < 0$.

Šiuo atveju turime

$$u_{i-1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) u_i + u_{i+1} = 0, \tag{2.12}$$

čia $1 - \frac{h^2\lambda}{2} > 1$.

Įvedame pažymėjimą: $1 - h^2\lambda/2 = \text{ch}\beta h$. Iš čia

$$\lambda = -\frac{4}{h^2}\text{sh}^2\frac{\beta h}{2}. \tag{2.13}$$

Tada bendrasis šios lygties sprendinys yra Sapagovas (2007):

$$u_i = c_1\text{ch}(i\beta h) + c_2\text{sh}(i\beta h).$$

Įrašome šią išraišką į (2.5), (2.6) nelokaliąsias integralines sąlygas ir, atlikę skaičiavimus, gauname tokio pavidalo determinantą, kurį prilyginame nuliui, norėdami rasti nenulinį sprendinį

$$\begin{vmatrix} 1 - \gamma_0\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\beta h/2}{\text{th}(\beta h/2)}\text{sh}\beta & -\gamma_0\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\beta h/2}{\text{th}(\beta h/2)}(\text{ch}\beta - 1) \\ \text{ch}\beta - \gamma_1\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\beta h/2}{\text{th}(\beta h/2)}\text{sh}\beta & \text{sh}\beta - \gamma_1\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\beta h/2}{\text{th}(\beta h/2)}(\text{ch}\beta - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Kai $\beta h/2$ – pakankamai mažas skaičius, tai $\dfrac{(\beta h)/2}{\text{th}(\beta h/2)} \approx 1$.

Taigi, neigiama tikrinė reikšmė λ, apibrėžta (2.13) formule egzistuoja tuomet, kai β yra šios lygties

$$\text{sh}\beta = (\gamma_0 + \gamma_1)\frac{1}{\beta}\frac{\beta h/2}{\text{th}(\beta h/2)}(\text{ch}\beta - 1)$$

sprendinys.

Ją pertvarkę į pavidalą (pasinaudoję formule: $\text{ch}\beta - 1 = 2\text{sh}^2(\beta h/2)$)

$$\text{sh}\frac{\beta}{2}\left(2\text{ch}\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{\beta}\text{sh}\frac{\beta}{2}\frac{\beta h}{\text{th}(\beta h/2)}\right) = 0,$$

gauname dvi lygtis:

$$\text{sh}\frac{\beta}{2} = 0, \tag{2.14}$$

$$2\text{ch}\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{\beta}\text{sh}\frac{\beta}{2}\frac{\beta h}{\text{th}(\beta h/2)}. \tag{2.15}$$

Iš (2.14) lygties seka, kad ji turi tik nulinį sprendinį $\beta = 0$, t. y. $\lambda = 0$. O kita (2.15) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\mathrm{th}\frac{\beta}{2} = \frac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}\frac{\mathrm{th}(\beta h/2)}{h}. \tag{2.16}$$

2.2 lema. Jei $h < \dfrac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}$, tai (2.4)–(2.6) skirtuminis uždavinys turi vienintelę neigiamą tikrinę reikšmę

$$\lambda = -\frac{4}{h^2}\mathrm{sh}^2\frac{\beta \mathrm{h}}{2},$$

(β – (2.16) lygties teigiamoji šaknis), tada ir tik tada, kai

$$\gamma_0 + \gamma_1 > 2. \tag{2.17}$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$f(\beta) = \mathrm{th}\frac{\beta}{2}, \qquad g(\beta) = \frac{2}{h(\gamma_0 + \gamma_1)}\mathrm{th}\frac{\beta h}{2}.$$

Išnagrinėkime keturis atvejus.

1) $\gamma_0 + \gamma_1 < 0$. Šiuo atveju $f(\beta)$ ir $g(\beta)$ visame intervale $\beta \in (0, \infty)$ yra priešingų ženklų, taigi šių funkcijų grafikai intervale $(0, \infty)$ nesikerta. (2.16) lygtis intervale $(0, \infty)$ šaknų neturi.

2) $\gamma_0 + \gamma_1 = 0$. (2.16) lygtis tampa tokia:

$$\mathrm{th}\frac{\beta h}{2} = 0$$

ir intervale $\beta \in (0, \infty)$ šaknų neturi.

3) $0 < \gamma_0 + \gamma_1 \leq 2$. Surandame funkcijų $f(\beta)$ ir $g(\beta)$ išvestines

$$f'(\beta) = \frac{1}{2\mathrm{ch}^2\dfrac{\beta}{2}}, \qquad g'(\beta) = \frac{1}{\gamma_0 + \gamma_1}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\beta h}{2}}.$$

Funkcijos $f(\beta)$, $g(\beta)$ – monotoniškai didėjančios intervale $(0, \infty)$, be to,

$$f(0) = 0, \qquad\qquad g(0) = 0,$$
$$f'(0) = \frac{1}{2}, \qquad\qquad g'(0) = \frac{1}{\gamma_0 + \gamma_1}.$$

Kadangi $\gamma_0 + \gamma_1 \leq 2$ ir $\mathrm{ch}^2 \dfrac{\beta h}{2} < \mathrm{ch}^2 \dfrac{\beta}{2}$, kai $h < 1$, turime

$$f'(\beta) < g'(\beta), \qquad\qquad \beta \in (0, \infty).$$

Taigi visame intervale $\beta \in (0, \infty)$ $f(\beta) < g(\beta)$. Lygtis (2.16) šaknų neturi.

4) $\gamma_0 + \gamma_1 > 2$. Sąlygą $h < \dfrac{2}{\gamma_0 + \gamma_1}$ galime perrašyti

$$\frac{2}{h(\gamma_0 + \gamma_1)} > 1.$$

Kai $\beta \longrightarrow \infty$, tai $f(\beta) \longrightarrow 1$, $g(\beta) \longrightarrow \dfrac{2}{h(\gamma_0 + \gamma_1)} > 1$, t. y. pakankamai didelėms β reikšmėms $f(\beta) < g(\beta)$. Iš sąlygų

$$f'(0) = \frac{1}{2}, \qquad\qquad g'(0) = \frac{1}{\gamma_0 + \gamma_1} < \frac{1}{2}$$

gauname $f(\beta) > g(\beta)$, kai β – pakankamai mažas teigiamas skaičius. Taigi egzistuoja vienas taškas $\beta^* > 0$, kuriame funkcijų $f(\beta)$ ir $g(\beta)$ grafikai kertasi. (2.16) lygtis intervale $\beta \in (0, \infty)$ turi vieną šaknį (2.2 paveikslas). Egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, turinti (2.13) išraišką. Lema įrodyta.

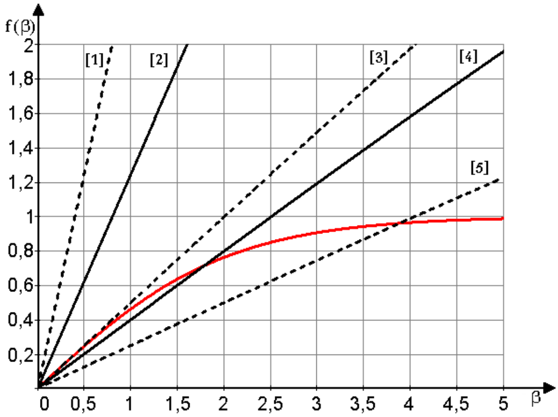
3 atvejis: $\lambda > 0$.

Šiuo atveju turime

$$u_{k-1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) u_k + u_{k+1} = 0, \tag{2.18}$$

čia $1 - \frac{h^2\lambda}{2} < 1$.

Nagrinėsime pirmiausia atvejį, kai $|1 - \frac{h^2\lambda}{2}| < 1$. Įvedame pažymėjimą: $1 - h^2\lambda/2 = \cos\alpha h$, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{h}, \dfrac{\pi}{h}\right)$.



2.2 pav. Funkcijų $f(\beta) = \mathrm{th}(\beta/2)$ ir $g(\beta) = (2/(\gamma_0 + \gamma_1))\mathrm{th}(h\beta/2)/h$ grafikai, čia kreivės [1], ... , [5], kai $\gamma_0 + \gamma_1 = 4; 8; 20; 25; 40$ ir $h = 1/10$
Fig. 2.2. Graphs of functions $f(\beta) = \mathrm{th}(\beta/2)$ and $g(\beta) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))\mathrm{th}(h\beta/2)/h$, where curves [1], ... , [5], then $\gamma_0 + \gamma_1 = 4; 8; 20; 25; 40$ and $h = 1/10$

Bendras (2.18) lygties sprendinys yra

$$u_k = c_1\cos(k\alpha h) + c_2\sin(k\alpha h).$$

Įrašę šią išraišką į (2.5), (2.6) nelokaliąsias integralines sąlygas ir atlikę skaičiavimus, gauname

$$\begin{cases} c_1 = \gamma_0\dfrac{h}{2}\Big[\Big(c_1\sum_{k=0}^{N-1}\cos(k\alpha h) + c_2\sum_{k=0}^{N-1}\sin(k\alpha h)\Big) \\ +\Big(c_1\sum_{k=1}^{N}\cos(k\alpha h) + c_2\sum_{k=1}^{N}\sin(k\alpha h)\Big)\Big], \\ c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha = \gamma_1\dfrac{h}{2}\Big[\Big(c_1\sum_{k=0}^{N-1}\cos(k\alpha h) + c_2\sum_{k=0}^{N-1}\sin(k\alpha h)\Big) \\ +\Big(c_1\sum_{k=1}^{N}\cos(k\alpha h) + c_2\sum_{k=1}^{N}\sin(k\alpha h)\Big)\Big]. \end{cases}$$

Atlikus pertvarkymus turime (čia $\frac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)} \approx 1$)

$$\begin{cases} \Big(1 - \dfrac{\gamma_0}{\alpha}\sin\alpha\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)}\Big)c_1 - \dfrac{\gamma_0}{\alpha}2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)}c_2 = 0, \\ \Big(\cos\alpha - \dfrac{\gamma_1}{\alpha}\sin\alpha\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)}\Big)c_1 + \Big(\sin\alpha - \dfrac{\gamma_1}{\alpha}2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)}\Big)c_2 = 0. \end{cases}$$

Iš šios sistemos gauname tokio pavidalo determinantą, kurį prilyginame nuliui, norėdami rasti nenulinį sprendinį

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\gamma_0}{\alpha}\sin\alpha\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)} & -\dfrac{\gamma_0}{\alpha}2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)} \\ \cos\alpha - \dfrac{\gamma_1}{\alpha}\sin\alpha\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)} & \sin\alpha - \dfrac{\gamma_1}{\alpha}2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)} \end{vmatrix} = 0.$$

Iš čia seka, kad

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{\alpha}\frac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)}\sin\frac{\alpha}{2}\Big) = 0. \tag{2.19}$$

Ši lygtis skiriasi nuo atitinkamos (1.23) lygties, gautos diferencialinio operatoriaus tikrinėms reikšmėms, tik daugikliu $\dfrac{(\alpha h)/2}{\mathrm{tg}(\alpha h/2)}$, kuris, esant pakankamai mažoms h reikšmėms, mažai skiriasi nuo vieneto.

Iš šios lygties surasime α reikšmes. Prilyginame nuliui kiekvieną iš dviejų daugiklių:

1) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = 0$, t. y. α nepriklauso nuo γ_0 ir γ_1 reikšmių, todėl gauname, kad

$$\alpha_k = 2k\pi, k = 1, 2, ..., K.$$

Mūsų nagrinėjamu atveju $|1 - \frac{h^2\lambda}{2}| < 1$ ir $1 - h^2\lambda/2 = \cos\alpha h$. Taigi

$$1 - \frac{h^2\lambda_k}{2} = \cos(k\pi h). \tag{2.20}$$

Iš šios lygties gauname tikrines reikšmes

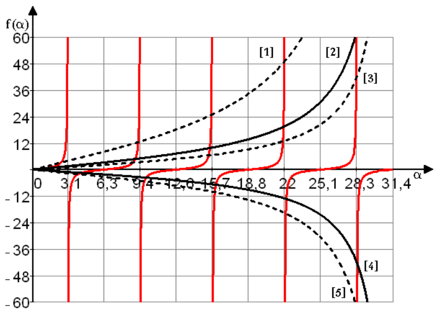
$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2}. \tag{2.21}$$

Skirtingas λ_k reikšmes gauname imant $K = N/2 - 1$, jei N – lyginis ir $K = (N-1)/2$, jei N – nelyginis. Šiuo atveju tikrinės reikšmės nepriklauso nuo parametrų γ_0, γ_1 iš nelokaliųjų integralinių sąlygų, todėl mes jas vadinsime pastoviosiomis tikrinėmis reikšmėmis. Taigi pastoviųjų tikrinių reikšmių skaičius yra $N/2 - 1$, kai N – lyginis skaičius; $(N-1)/2$, kai N – nelyginis skaičius.

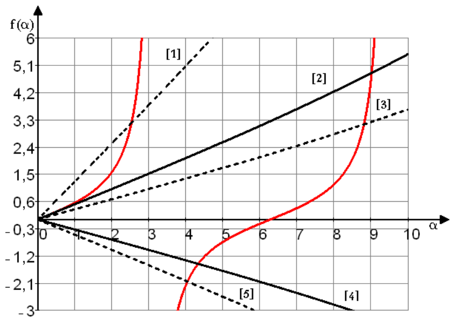
2) $\cos\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\gamma_0+\gamma_1}{\alpha}\dfrac{(\alpha h)/2}{\operatorname{tg}(\alpha h/2)}\sin\dfrac{\alpha}{2} = 0.$

Iš šios lygties gauname

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\gamma_0+\gamma_1}\frac{\operatorname{tg}(\alpha h/2)}{h}. \tag{2.22}$$



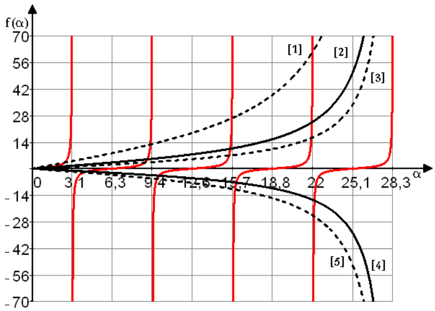
2.3 pav. Funkcijų $f(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ ir $g(\alpha) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))(\operatorname{tg}(h\alpha/2)/h)$ grafikai, čia kreivės [1], ... , [5], kai $\gamma_0+\gamma_1 = 0,8; 2; 3; -3; -2$ ir $h = 1/10$
Fig. 2.3. Graphs of functions $f(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ and $g(\alpha) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))(\operatorname{tg}(h\alpha/2)/h)$, where curves [1], ... , [5], then $\gamma_0+\gamma_1 = 0,8; 2; 3; -3; -2$ and $h = 1/10$



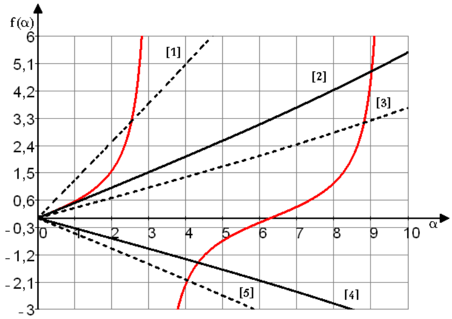
2.4 pav. Funkcijų $f(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ ir $g(\alpha) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))(\operatorname{tg}(h\alpha/2)/h)$ grafikai, čia kreivės [1], ... , [5], kai $\gamma_0+\gamma_1 = 0,8; 2; 3; -3; -2$ ir $h = 1/10$
Fig. 2.4. Graphs of functions $f(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ and $g(\alpha) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))(\operatorname{tg}(h\alpha/2)/h)$, where curves [1], ... , [5], then $\gamma_0+\gamma_1 = 0,8; 2; 3; -3; -2$ and $h = 1/10$

Tikrinėms reikšmėms rasti nubraižome (2.22) lygties abiejų pusių funkcijų grafikus (2.3–2.6 paveikslai).

Priklausomai nuo pasirinktos N reikšmės (lyginis ar nelyginis skaičius), gauname skirtingą teigiamų tikrinių reikšmių skaičių. Nagrinėkime atvejį, kai $N = 10$ (2.3–2.4 paveikslai). Tikrinių reikšmių skaičius priklauso nuo γ_0 ir γ_1



2.5 pav. Funkcijų $f(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha/2)$ ir $g(\alpha) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))(\mathrm{tg}(h\alpha/2)/h)$ grafikai, čia kreivės [1], ... , [5], kai $\gamma_0+\gamma_1 = 0,8; 2; 3; -3; -2$ ir $h = 1/9$
Fig. 2.5. Graphs of functions $f(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha/2)$ and $g(\alpha) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))(\mathrm{tg}(h\alpha/2)/h)$, where curves [1], ... , [5], then $\gamma_0+\gamma_1 = 0,8; 2; 3; -3; -2$ and $h = 1/9$



2.6 pav. Funkcijų $f(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha/2)$ ir $g(\alpha) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))(\mathrm{tg}(h\alpha/2)/h)$ grafikai, čia kreivės [1], ... , [5], kai $\gamma_0+\gamma_1 = 0,8; 2; 3; -3; -2$ ir $h = 1/9$
Fig. 2.6. Graphs of functions $f(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha/2)$ and $g(\alpha) = (2/(\gamma_0+\gamma_1))(\mathrm{tg}(h\alpha/2)/h)$, where curves [1], ... , [5], then $\gamma_0+\gamma_1 = 0,8; 2; 3; -3; -2$ and $h = 1/9$

reikšmių parinkimo. Gauname, kad kai $\gamma_0+\gamma_1 < 2$, tai tikrinių reikšmių skaičius yra $N/2$; kai $\gamma_0+\gamma_1 \geq 2$, tai tikrinių reikšmių skaičius $N/2-1$. Galime daryti išvadą, kad didinant $\gamma_0+\gamma_1$ reikšmę, tiksliau, kai $\gamma_0+\gamma_1 \geq 2$, vienetu sumažėja tikrinių reikšmių skaičius. Nagrinėjamame pavyzdyje (2.3–2.4 paveikslai) turime, kad vietoje 5 tikrinių reikšmių, kai $\gamma_0+\gamma_1 < 2$, atsiranda tik 4 tikrinės reikšmės, kai $\gamma_0+\gamma_1 \geq 2$.

Taip pat išnagrinėkime atvejį, kai N – nelyginis, $N = 9$ (2.5–2.6 paveikslai). Atlikus analogišką analizę gauname, kad tikrinių reikšmių skaičius $(N-1)/2$, kai $\gamma_0+\gamma_1 < 2$ ir $(N-3)/2$, tuo atveju, kai $\gamma_0+\gamma_1 \geq 2$. Taip pat pastebime, kad kai $\gamma_0+\gamma_1 \geq 2$, tikrinių reikšmių skaičius sumažėja vienetu. Iš 2.5–2.6 paveikslų matome, kad vietoje 4 teigiamų tikrinių reikšmių (kai $\gamma_0+\gamma_1 < 2$), atsiranda 3 tikrinės reikšmės (kai $\gamma_0+\gamma_1 \geq 2$).

Išanalizavus visas teigiamas tikrines reikšmes gauname, kad su visomis $\gamma_0+\gamma_1$ reikšmėmis (2.4)–(2.6) skirtuminis uždavinys turi tam tikrą skaičių teigiamųjų tikrinių reikšmių, gaunamų iš (2.20) lygties, priklausančių nuo $\gamma_0+\gamma_1$ reikšmės, ir tam tikrą skaičių pastoviųjų teigiamųjų tikrinių reikšmių, gaunamų iš (2.22) lygties ir nepriklausančių nuo parametro $\gamma_0+\gamma_1$ reikšmės.

Taigi bet kurioms $\gamma_0+\gamma_1$ ir N reikšmėms suskaičiavę visas gautas realias tikrines reikšmes (nulinę, neigiamas ir teigiamas), gauname, kad bendras realių tikrinių reikšmių skaičius yra $N-1$, t. y. realiųjų tikrinių reikšmių skaičius sutampa su matricos eile. Iš to darome išvadą, kad visos tikrinės reikšmės yra realios, t. y. kompleksinių tikrinių reikšmių nėra.

Taip pat pastebėsime, kad ieškant teigiamų tikrinių reikšmių buvo nagrinėtas tik atvejis $|1-\frac{h^2\lambda}{2}|<1$. Kitų atvejų nagrinėti nebereikia, nes suradome visas $N-1$ tikrines reikšmes.

2.4. Kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės

Šiame skyriuje nagrinėsime tikrinių reikšmių uždavinį diferencialiniam operatoriui su viena klasikine sąlyga kairiajame taške ir kita nelokaliąja integraline sąlyga, kurioje integruojama ne visame intervale $[0,1]$ kaip prieš tai aptartame atvejyje, o tik jo dalyje $[1/4,3/4]$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\lambda u=0, 0<x<1, \tag{2.23}$$

$$u(0)=0, \tag{2.24}$$

$$u(1)=\gamma\int_{1/4}^{3/4}u(x)\mathrm{d}x. \tag{2.25}$$

Pritaikius baigtinių skirtumų metodą (2.23) diferencialinei lygčiai, o (2.24), (2.25) nelokaliosioms integralinėms sąlygoms trapecijų formulę, šį uždavinį suvedame į skirtuminę lygčių sistemą

$$\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}+\lambda u_i=0, i=1,2,...,N-1, \tag{2.26}$$

$$u_0=0, \tag{2.27}$$

$$u_N=\gamma h\left(\frac{u_{N/4}+u_{3N/4}}{2}+\sum_{i=N/4+1}^{3N/4-1}u_i\right). \tag{2.28}$$

Skaičius N parinktas taip, kad $N/4$ būtų sveikas skaičius. Ieškosime skirtuminio operatoriaus tikrinių reikšmių, t. y. tokių λ reikšmių, su kuriomis tiesinių algebrinių lygčių sistema turi netrivialų sprendinį. Pasinaudodami ta pačia metodika, kaip ir prieš tai aptartame skyriuje, nagrinėsime tris atskirus atvejus.

1 atvejis: $\lambda = 0$.

Išnagrinėsime, ar $\lambda = 0$ gali būti tikrinė reikšmė. Kai $\lambda = 0$, tai (2.26) lygties bendrasis sprendinys yra

$$u_i = c_1 ih + c_2.$$

Iš (2.27) sąlygos gauname, kad $c_2 = 0$, tai $u_i = c_1 ih$. Įrašę šią išraišką į (2.28) nelokaliąją integralinę sąlygą, turime

$$c_1 Nh = c_1 \gamma h \left(\frac{\frac{N}{4}h + \frac{3N}{4}h}{2} + \sum_{i=N/4+1}^{3N/4-1} ih \right).$$

Iš šios lygybės gauname, kad $\gamma h \frac{N}{4} = 1$. Iš to seka, kad egzistuoja $\lambda = 0$, kai $\gamma = 4$. Galime suformuluoti lemą apie nulinės tikrinės reikšmės egzistavimą.

2.3 lema. Skaičius $\lambda = 0$ yra (2.26)–(2.28) skirtuminio uždavinio tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai

$$\gamma = 4. \tag{2.29}$$

2 atvejis: $\lambda < 0$.

Nagrinėsime neigiamas tikrines reikšmes. Šiuo atveju turime

$$u_{i-1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) u_i + u_{i+1} = 0,$$

čia $1 - \frac{h^2\lambda}{2} > 1$.

Įvedę pažymėjimą

$$1 - \frac{h^2\lambda}{2} = \mathrm{ch}\beta h, \tag{2.30}$$

gauname, kad bendrasis sprendinys yra

$$u_i = c_1 \mathrm{sh}(i\beta h) + c_2 \mathrm{ch}(i\beta h).$$

Iš (2.27) sąlygos gauname, kad $c_2 = 0$, tai $u_i = c_1 \mathrm{sh}(ih\beta)$. Įrašę šią išraišką į (2.28) nelokaliąją integralinę sąlygą turime, kad

$$c_1\text{sh}(Nh\beta) = \gamma h\Big(\frac{c_1\text{sh}(\frac{N}{4}h\beta) + c_1\text{sh}(\frac{3N}{4}h\beta)}{2} + \sum_{i=N/4+1}^{3N/4-1} c_1\text{sh}(ih\beta)\Big).$$

Pasinaudosime žinoma formule Gradstein and Ryzhik (1974)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\text{sh}ky = \text{sh}\frac{n-1}{2}y \cdot \text{sh}\frac{ny}{2}\frac{1}{\text{sh}(y/2)},$$

kurią naudosime mūsų gautai sumai apskaičiuoti.

Atlikę skaičiavimus, gauname tokio pavidalo lygtį

$$\text{ch}\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma h}{2}\text{cth}\frac{\beta h}{2}\text{sh}\frac{\beta}{4}$$

arba

$$\text{ch}\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{\beta}\text{sh}\frac{\beta}{4}\Big(\frac{\beta h}{2}\text{cth}\frac{\beta h}{2}\Big), \tag{2.31}$$

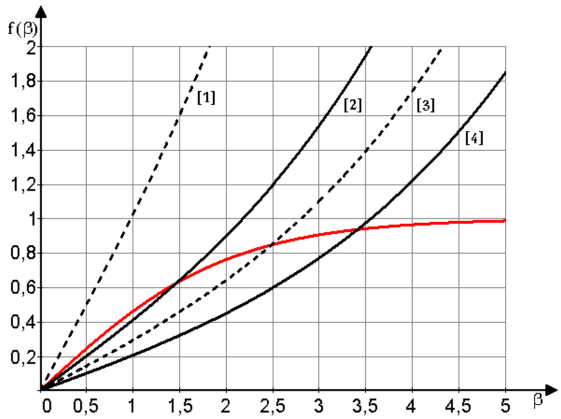
čia $\frac{\beta h}{2}\text{cth}\frac{\beta h}{2} \approx 1$, kai βh – pakankamai mažas skaičius. Vėlgi pastebėsime, kad ši lygtis skiriasi nuo (1.17) lygties, aprašančios diferencialinio operatoriaus tikrines reikšmes daugikliu $\frac{\beta h}{2}\text{cth}\frac{\beta h}{2}$, kuris mažai skiriasi nuo vieneto, kai βh pakankamai mažas skaičius.

Taip pat šią lygtį galime perrašyti kitokiu pavidalu

$$\text{th}\frac{\beta}{2} = \frac{2\beta}{\gamma}\text{ch}\frac{\beta}{4}\frac{\text{th}\frac{\beta h}{2}}{\frac{\beta h}{2}}. \tag{2.32}$$

Kompiuterinio modeliavimo metodu gauname, kad šios lygties vienintelė teigiama šaknis β^* egzistuoja, kai $\gamma > 4$. Taigi kai $\gamma > 4$, skirtuminis operatorius, apibrėžtas (2.26)–(2.28) formulėmis, turi vieną neigiamą tikrinę reikšmę, apibrėžiamą lygtimi (2.30), t. y. $\lambda = -\frac{4}{h^2}\text{sh}^2\frac{\beta h}{2}$.

Norėdami rasti neigiamas tikrines reikšmes, nubraižome (2.32) lygties abiejų pusių grafikus prie skirtingų γ reikšmių (2.7 paveikslas). Kaip matome iš 2.7 paveikslo, grafikai intervale $(0,\infty)$ nesikerta, kai $0 < \gamma < 4$, ir turi vieną susikirtimo tašką tuo atveju, jei $\gamma > 4$. Taip pat kaip ir nulinės tikrinės reikšmės



2.7 pav. Funkcijų $f(\beta) = \text{th}(\beta/2)$ ir $g(\beta) = (2\beta/\gamma)\text{ch}(\beta/4)\text{th}(h\beta/2)/(h\beta/2)$ grafikai, čia kreivės [1], ... , [4], kai $\gamma = 2; 5; 7; 10$ ir $h = 1/10$

Fig. 2.7. Graphs of functions $f(\beta) = \text{th}(\beta/2)$ and $g(\beta) = (2\beta/\gamma)\text{ch}(\beta/4)\text{th}(h\beta/2)/(h\beta/2)$, where curves [1], ... , [4], then $\gamma = 2; 5; 7; 10$ and $h = 1/10$

atveju, taip ir neigiamos tikrinės reikšmės atveju galima suformuluoti lemą apie jos egzistavimo sąlygas.

2.4 lema. (2.26)–(2.28) skirtuminis uždavinys turi vienintelę neigiamą tikrinę reikšmę λ tada ir tik tada, kai

$$\gamma > 4. \tag{2.33}$$

3 atvejis: $\lambda > 0$.

Ieškosime teigiamųjų tikrinių reikšmių. Šiuo atveju turime

$$u_{i-1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right)u_i + u_{i+1} = 0, \tag{2.34}$$

čia $1 - \frac{h^2\lambda}{2} < 1$.

Nagrinėsime atvejį, kai $|1 - \frac{h^2\lambda}{2}| < 1$. Įvedame pažymėjimą: $1 - h^2\lambda/2 = \cos\alpha h$.

Bendras (2.34) lygties sprendinys yra

$$u_i = c_1\sin(\alpha ih) + c_2\cos(\alpha ih).$$

Iš (2.27) sąlygos gauname, kad $c_2 = 0$, tai $u_i = c_1 \sin(ih\alpha)$. Įrašę šią išraišką į (2.28) nelokaliąją integralinę sąlygą turime, kad

$$c_1 \sin(Nh\alpha) = \gamma h \Big(\frac{c_1 \sin(\frac{N}{4} h\alpha) + c_1 \sin(\frac{3N}{4} h\alpha)}{2} + \sum_{i=N/4+1}^{3N/4-1} c_1 \sin(ih\alpha) \Big). \tag{2.35}$$

Pasinaudojus formule

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin ky = \sin \frac{n-1}{2} y \cdot \sin \frac{ny}{2} \frac{1}{\sin(y/2)}$$

ir atlikus pertvarkymus, iš (2.35) lygties gauname dvi lygtis

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0, \qquad\qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma h}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha h}{2} \sin \frac{\alpha}{4}$$

arba

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0, \tag{2.36}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{4} \Big(\frac{\alpha h}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha h}{2} \Big), \tag{2.37}$$

čia $\frac{\alpha h}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha h}{2} \approx 1$, kai h – pakankamai mažas.

Lygties (2.36) šaknys yra

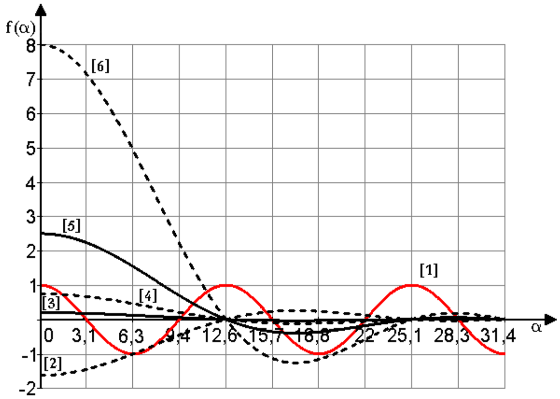
$$\alpha_k = 2k\pi, k = 1, 2, ...K, \tag{2.38}$$

kurios nepriklauso nuo parametro γ reikšmės.

Taip pat nustatysime, kiek (2.37) lygtis turi šaknų pasirinktame intervale. Žinant šios lygties šaknis α_k, tikrinės reikšmės λ_k apskaičiuojamos pagal formulę $\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha_k h}{2}$.

Tikrinėms reikšmėms rasti nubraižome (2.37) lygties abiejų pusių funkcijų grafikus (2.8 paveikslas).

Iš pateiktų grafikų nustatysime, kiek (2.37) lygtis turi realiųjų teigiamų šak-



2.8 pav. Funkcijų $f(\alpha) = \cos(\alpha/2)$ (kreivė [1]) ir $g(\alpha) = (\gamma/\alpha)\sin(\alpha/4)\frac{\alpha h}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha h}{2}$ grafikai, čia kreivės [2], ... , [6], kai $\gamma = -6,5; 0,8; 2; 7; 32$ ir $h = 1/10$
Fig. 2.8. Graphs of functions $f(\alpha) = \cos(\alpha/2)$ (curve [1]) and $g(\alpha) = (\gamma/\alpha)\sin(\alpha/4)\frac{\alpha h}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha h}{2}$, where curves [2], ... , [6], then $\gamma = -6,5; 0,8; 2; 7; 32$ and $h = 1/10$

nų intervale $(0, N\pi)$, t. y. rasime, kiek tikrinių reikšmių, patenkančių į intervalą $(0, N\pi)$, turi (2.23)–(2.25) uždavinys. 2.8 paveiksle pateikti $\cos(\alpha/2)$ ir $\frac{\gamma}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{4}\frac{\alpha h}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha h}{2}$ funkcijų grafikai skirtingoms γ reikšmėms ($\gamma = -6,5; 2; 7; 10; 32$). Prie skirtingų γ reikšmių yra skirtingas skaičius teigiamų tikrinių reikšmių λ. Kadangi nagrinėjame (2.26)–(2.28) skirtuminį uždavinį, tai spektro struktūrai įtakos turi ir parametro N parinkimas. Plačiau aptarsime atvejį, kai $N = 10$, ir gautas išvadas (2.8 paveikslas).

- Jei $0 < \gamma < 4$, tai (2.37) lygtis turi penkias šaknis intervale $(0, 10\pi)$. Tada galime daryti išvadą, kad mūsų nagrinėjamas (2.23)–(2.25) uždavinys turi penkias paprastąsias tikrines reikšmes, kurios priklauso nuo parametro γ reikšmės. Taip pat dar yra keturios pastoviosios tikrinės reikšmės, gaunamos iš (2.38) lygybės: $(2\pi)^2$, $(4\pi)^2$, $(6\pi)^2$, $(8\pi)^2$.

- Jei $\gamma = 4$, tai (2.37) lygtis turi keturias šaknis intervale $(0, 10\pi)$. Tada galime daryti išvadą, kad mūsų nagrinėjamas (2.23)–(2.25) uždavinys turi keturias paprastąsias tikrines reikšmes, priklausančias nuo parametro γ reikšmės, vieną nulinę tikrinę reikšmę ($\lambda = 0$) ir dar yra keturios pastoviosios tikrinės reikšmės $(2\pi)^2$, $(4\pi)^2$, $(6\pi)^2$, $(8\pi)^2$.

- Jei $4 < \gamma < \gamma_*$, čia $\gamma_* \approx 28,367$, tai lygtis (2.37) turi keturias šaknis

2.1 lentelė. Parametro γ reikšmės, su kuriomis atsiranda kartotinės tikrinės reikšmės

Table 2.1. Values of parameter γ , when there exist multiple eigenvalues

N	γ
10	28,367
20	20,587
40	19,393
100	19,049
200	18,999

intervale $(0, 10\pi)$. Tada galime daryti išvadą, kad mūsų nagrinėjamas uždavinys (2.23)–(2.25) turi keturias paprastąsias tikrines reikšmes, priklausančias nuo parametro γ reikšmės, taip pat vieną neigiamą tikrinę reikšmę ir keturias pastoviąsias tikrines reikšmes.

- Jei $\gamma = \gamma_* \approx 28,367$, tai lygtis (2.37) turi dvi paprastąsias šaknis ir vieną kartotinę intervale $(0, 10\pi)$. Tada mūsų nagrinėjamas (2.23)–(2.25) uždavinys turi dvi paprastąsias tikrines reikšmes ir teigiamąją dukart kartotinę tikrinę reikšmę, kurios priklauso nuo parametro γ reikšmės, taip pat vieną neigiamą tikrinę reikšmę ir keturias pastoviąsias tikrines reikšmes.

- Jei $\gamma > \gamma_* \approx 28,367$, tai (2.23)–(2.25) uždavinys intervale $(0, 10\pi)$ turi dvi paprastąsias tikrines reikšmes, priklausančias nuo γ reikšmės, vieną neigiamą tikrinę reikšmę, keturias pastoviąsias tikrines reikšmes. Taip pat šiuo atveju vietoje kartotinės teigiamosios tikrinės reikšmės atsiranda dvi kompleksinės tikrinės reikšmės.

Keičiant parametro N reikšmę, pastebėtas ir γ_* kitimas, t. y. didinant N reikšmę, γ_* reikšmė artėja į 18,99 (toks rezultatas buvo gautas diferencialinio operatoriaus atveju (1 skyrius)). Keletas rezultatų pateikta 2.1 lentelėje.

Ištyrus (2.23)–(2.25) uždavinio spektrą galima teigti, kad, priklausomai nuo parametro γ, esančio (2.25) nelokaliojoje sąlygoje, reikšmės ir integravimo rėžių šioje nelokalioje integralinėje sąlygoje, be teigiamų tikrinių reikšmių gali atsirasti neigiamos, kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės. Taigi gauname, kad kaip ir diferencialinio operatoriaus atveju (1 skyrius), taip ir skirtuminiam operatoriui gali egzistuoti kompleksinės tikrinės reikšmės.

2.5. Antrojo skyriaus išvados

- Išnagrinėta (2.1)–(2.3) diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis spektro struktūra, jos priklausomybė nuo parametrų γ_0, γ_1 reikšmių. Taip pat ištirta (2.23)–(2.25) diferencialinio operatoriaus su viena klasikine ir kita nelokaliąja integraline sąlyga tikrinių reikšmių priklausomybė nuo parametro γ reikšmės ir integravimo rėžių.
- Pateiktas (2.1)–(2.3) ir (2.23)–(2.25) diferencialinių uždavinių suvedimas į (2.4)–(2.6) ir (2.26)–(2.28) skirtuminių lygčių sistemas atitinkamai ir ištirti kokybiniai spektro struktūros pasikeitimai. Atskirais atvejais surastos tikrinės funkcijos ir tikrinės reikšmės. (2.1)–(2.3) uždavinio atveju surastos visos realios tikrinės reikšmės (nulinės, neigiamos ir teigiamos) ir ištirta jų priklausomybė nuo parametro N reikšmės parinkimo. Padaryta išvada apie kompleksinių reikšmių nebuvimą. Gauta, kad šiame uždavinyje egzistuoja tik realiosios tikrinės reikšmės. Nagrinėjant diferencialinį (2.23)–(2.25) uždavinį visos realiosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik kai $0 < \gamma < \gamma_*$. Prie kai kurių γ gali atsirasti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės. Šių reikšmių atsiradimui įtakos turi ir parametro N parinkimas.

3

Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su kintamais koeficientais integralinėse sąlygose

3.1. Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su kintamais koeficientais integralinėse sąlygose

Šiame skyriuje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis ir kintamais koeficientais jose. Tiriama tikrinių reikšmių uždavinio spektro struktūra. Atliekama analizė, kaip tikrinės reikšmės priklauso nuo parametrų reikšmių iš nelokaliųjų integralinių sąlygų. Buvo atliktas ir aprašytas skaitinis eksperimentas tikrinėms reikšmėms rasti. Analizuojamos kartotinių ir kompleksinių tikrinių reikšmių atsiradimo ir egzistavimo sritys.

Tikrinių reikšmių uždavinys nagrinėjamas straipsniuose (Sapagovas 2002b, 2005; Štikonas 2007), kai nelokaliosios sąlygos yra Bitsadzės ir Samarskio tipo; straipsniuose (Čiegis *et al.* 2002; Pečiulytė *et al.* 2005; Sapagovas 2005, 2008), kai nelokaliosios sąlygos yra integralinės. Šiame disertacijos skyriuje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys paprastajam diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis, kai kintami koeficientai yra šiose sąlygose. Toks atvejis, t. y. uždavinys su kintamais koeficientais iš nelokaliųjų sąlygų, matematinėje literatūroje yra mažiau nagrinėtas, o teorinių tyrimų apie spektro struktūrą šiuo atveju praktiškai nėra. Skyriuje tirsime, kada atsiranda nulinė, neigiamos, teigiamos, taip pat kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės. Kompleksinių tikrinių reikšmių atsiradimas nagrinėjamas per kartotinių tikrinių reikšmių pasirodymą. Norint atlikti išsamesnę analizę, šiame skyriuje tiriamas tiek diferencialinis, tiek skirtuminis atvejai. Pagrindiniai skyriaus rezultatai atspausdinti straipsniuose (Jesevičiūtė 2008, 2009; Jachimavičienė *et al.* 2009).

3.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime tikrinių reikšmių uždavinį diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda u = 0, 0 < x < 1, \tag{3.1}$$

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 \alpha(x) u(x) \mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 \beta(x) u(x) \mathrm{d}x, \tag{3.3}$$

čia γ_1, γ_2 – duoti parametrai, o $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – duotos svorinės funkcijos.

Šiame skyriuje tirsime spektro struktūrą ir parametrų iš nelokaliųjų sąlygų įtaką tikrinių reikšmių pasiskirstymui. Tikrinių reikšmių analizė diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis yra glaudžiai susijusi su skirtuminių schemų parabolinėms lygtims stabilumu, diferencialinio uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties klausimais ir skirtuminių schemų sprendimu iteraciniais metodais. Tirsime (3.1)–(3.3) uždavinio stabilumo sritį. Šiame skyriuje skaitiškai nagrinėsime (3.1) uždavinį su tam tikromis konkrečiomis nelokaliosiomis sąlygomis.

3.3. Spektro struktūros analizė

Analizuokime (3.1) vienamatį tikrinių reikšmių uždavinį su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 (1 + b_1 x) u(x) \mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 (1 + b_2 x) u(x) \mathrm{d}x, \tag{3.5}$$

čia γ_1, γ_2, b_1, b_2 yra duoti parametrai. Tokio tipo funkcijų $\alpha(x)$, $\beta(x)$ išraiškos sutinkamos daugelyje praktinių uždavinių.

Tirsime tikrines reikšmes. Tuo tikslu bus nagrinėjami trys atskiri atvejai.

1 atvejis: $\lambda = 0$. Pirmiausia apibrėšime sąlygas, kada (3.1), (3.4), (3.5) uždavinio tikrinė reikšmė yra lygi nuliui.

3.1 lema. Būtinos ir pakankamos sąlygos, kad (3.1), (3.4), (3.5) uždavinio tikrinė reikšmė būtų lygi nuliui, $\lambda = 0$, yra

$$\frac{\gamma_1 \gamma_2}{12}(b_1 - b_2) + \frac{\gamma_1}{2}\left(1 + \frac{b_1}{3}\right) + \gamma_2\left(\frac{1}{2} + \frac{b_2}{3}\right) - 1 = 0. \tag{3.6}$$

Įrodymas. Šiuo tiriamu atveju $\lambda = 0$, tada bendrasis (3.1) diferencialinės lygties sprendinys yra

$$u(x) = c_1 x + c_2$$

visoms laisvai pasirinktoms konstantoms c_1 ir c_2.

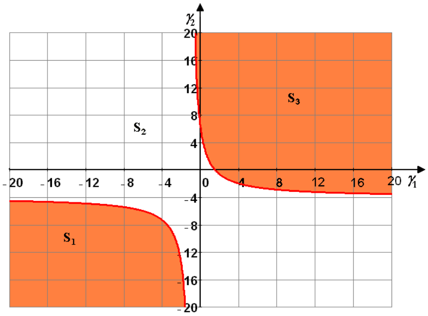
Įrašę šį sprendinį į (3.4) ir (3.5) nelokaliąsias sąlygas, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} c_2 = \gamma_1\left(c_1\left(\frac{1}{2} + \frac{b_1}{3}\right) + c_2\left(1 + \frac{b_1}{2}\right)\right), \\ c_1 + c_2 = \gamma_2\left(c_1\left(\frac{1}{2} + \frac{b_2}{3}\right) + c_2\left(1 + \frac{b_2}{2}\right)\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

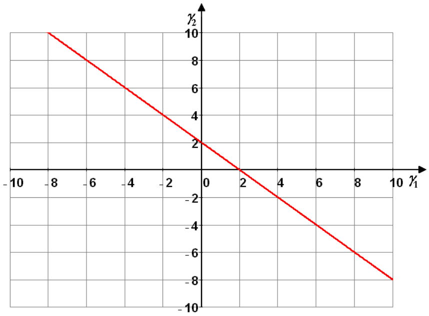
(3.1), (3.4), (3.5) uždavinio tikrinė reikšmė λ yra lygi nuliui, jei (3.7) lygčių sistema turi netrivialų sprendinį. Kad būtų tenkinamos šios sąlygos, (3.7) sistemos determinantas turi būti lygus nuliui

$$D = \begin{vmatrix} \gamma_1\left(\frac{1}{2} + \frac{b_1}{3}\right) & \gamma_1\left(1 + \frac{b_1}{2}\right) - 1 \\ \gamma_2\left(\frac{1}{2} + \frac{b_2}{3}\right) - 1 & \gamma_2\left(1 + \frac{b_2}{2}\right) - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Atlikę pertvarkymus, gauname (3.6) lygtį. Lema įrodyta.



3.1 pav. Hiperbolė (3.6) ir sritys S_1, S_2, S_3, kai $b_1 = -b_2 = 1$
Fig. 3.1. Hyperbola (3.6) and areas S_1, S_2, S_3, when $b_1 = -b_2 = 1$



3.2 pav. Tiesė (3.6), kai $b_1 = b_2 = 0$
Fig. 3.2. Line (3.6), when $b_1 = b_2 = 0$

Koordinačių plokštumoje (γ_1, γ_2) (3.6) lygtis aprašo hiperbolę (3.1 paveikslas). Priklausomai nuo parametrų b_1 ir b_2 reikšmių, ši hiperbolė gali peraugti į tiesę (3.2 paveikslas).

3.1 lemoje buvo gauta, kad taške, priklausančiam hiperbolei (arba tiesei), $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė. Dvi hiperbolės šakos dalina visą koordinačių plokštumą (γ_1, γ_2) į tris sritis S_1, S_2, S_3 (3.1 paveikslas). Tuo atveju, kai iš (3.6) lygties vietoje hiperbolės gauname tiesę, koordinačių sritis dalinama į dvi begalines sritis. Išsamesnę spektro analizę atliksime 3.4 poskyryje.

2 atvejis: $\lambda > 0$. Tirsime teigiamas tikrines reikšmes.

3.2 lema. (3.1), (3.4), (3.5) diferencialinis uždavinys turi teigiamas tikrines reikšmes

$$\lambda_k = \alpha_k^2,$$

kai α_k yra lygties

$$\gamma_1\gamma_2\frac{b_1 - b_2}{\alpha^2}\left(\frac{2}{\alpha}(\cos\alpha - 1) + \sin\alpha\right) + \frac{\gamma_1}{\alpha}\left(\cos\alpha + b_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - 1\right) - 1\right) - \frac{\gamma_2}{\alpha}\left(1 - \cos\alpha + b_2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha\right)\right) + \sin\alpha = 0 \tag{3.8}$$

šaknys intervale $\alpha \in (0, \infty)$.

Įrodymas. Jei $\lambda > 0$, tai bendrasis (3.1) lygties sprendinys yra

$$u(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x,$$

čia $\alpha = \sqrt{\lambda} > 0$.

Naudodami prieš tai aprašytą metodiką, šį sprendinį įrašome į (3.4) ir (3.5) nelokaliąsias integralines sąlygas. Atlikę pertvarkymus, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_1 = c_1 \dfrac{\gamma_1}{\alpha}\left(\sin\alpha + b_1\left(\dfrac{\cos\alpha}{\alpha} + \sin\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)\right) + \\ + c_2 \dfrac{\gamma_1}{\alpha}\left(1 - \cos\alpha + b_1\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + \cos\alpha\right)\right), \\ c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha = c_1 \dfrac{\gamma_2}{\alpha}\left(\sin\alpha + b_2\left(\dfrac{\cos\alpha}{\alpha} + \sin\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)\right) + \\ + c_2 \dfrac{\gamma_2}{\alpha}\left(1 - \cos\alpha + b_2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha\right)\right). \end{cases}$$

Šios sistemos determinantas turi būti lygus nuliui. Determinantą prilyginę nuliui ir atlikę skaičiavimus, gauname (3.8) lygtį. Lema įrodyta.

(3.8) lygtis gali turėti begalinį skaičių šaknų.

3 atvejis: $\lambda < 0$. Aprašysime trečiąjį atvejį – neigiamas tikrines reikšmes.

3.3 lema. (3.1), (3.4), (3.5) diferencialinis uždavinys turi neigiamas tikrines reikšmes

$$\lambda_k = -\beta_k^2,$$

kai $\beta_k > 0$ yra lygties

$$\gamma_1\gamma_2 \frac{b_1 - b_2}{\beta^2}\left(\frac{2}{\beta}(\mathrm{ch}\beta - 1) - \mathrm{sh}\beta\right) + \frac{\gamma_1}{\beta}\left(1 - \mathrm{ch}\beta + b_1\left(1 - \frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta}\right)\right) - \frac{\gamma_2}{\beta}\left(\mathrm{ch}\beta - 1 + b_2\left(\mathrm{ch}\beta - \frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta}\right)\right) + \mathrm{sh}\beta = 0 \tag{3.9}$$

šaknys intervale $\beta \in (0, \infty)$.

Įrodymas. Šios lemos įrodymui taikome tokį patį principą, kaip ir 3.1, 3.2

lemų įrodymui. Kai $\lambda < 0$, tai bendrasis (3.1) lygties sprendinys yra

$$u(x) = c_1 \mathrm{ch}\beta x + c_2 \mathrm{sh}\beta x.$$

Įrašę bendrąjį sprendinį į (3.4) ir (3.5) nelokaliąsias integralines sąlygas turime

$$\begin{cases} c_1 = c_1 \dfrac{\gamma_1}{\beta}\Big(\mathrm{sh}\beta + b_1\Big(\mathrm{sh}\beta + \dfrac{1-\mathrm{ch}\beta}{\beta}\Big)\Big) + c_2 \dfrac{\gamma_1}{\beta}\Big(\mathrm{ch}\beta - 1 + \\ +b_1\Big(\mathrm{ch}\beta - \dfrac{\mathrm{sh}\beta}{\beta}\Big)\Big), \\ c_1 \mathrm{ch}\beta + c_2 \mathrm{sh}\beta = c_1 \dfrac{\gamma_2}{\beta}\Big(\mathrm{sh}\beta + b_2\Big(\mathrm{sh}\beta + \dfrac{1-\mathrm{ch}\beta}{\beta}\Big)\Big) + \\ +c_2 \dfrac{\gamma_2}{\beta}\Big(\mathrm{ch}\beta - 1 + b_2\Big(\mathrm{ch}\beta - \dfrac{\mathrm{sh}\beta}{\beta}\Big)\Big). \end{cases}$$

Prilyginę šios lygčių sistemos determinantą nuliui ir atlikę skaičiavimus, gauname (3.9) lygtį. Iš to seka, kad lema įrodyta.

Po atliktos analizės randame nulinę, neigiamas ir teigiamas tikrines reikšmes, atitinkamai iš (3.6), (3.8) ir (3.9) lygčių. Išsamesnę tikrinių reikšmių analizę aprašysime 3.4 poskyryje pasitelkę skaitinius eksperimentus.

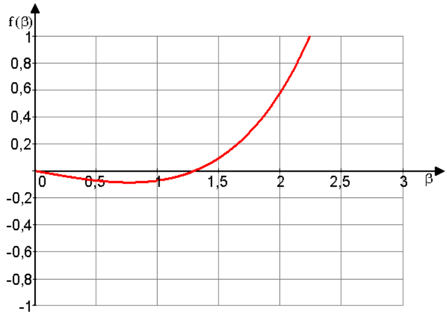
3.4. Skaitiniai eksperimentai

Turime (3.1)–(3.3) diferencialinį operatorių su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Mus domina tikrinių reikšmių struktūra. Norint atlikti išsamesnę spektro analizę, buvo atliktas skaitinis eksperimentas. Analizuojama parametrų γ_1, γ_2 įtaka tikrinių reikšmių pasiskirstymui. Stebimi neigiamų ir teigiamų tikrinių reikšmių skaičiaus pokyčiai. Šiam tikslui skaitiškai nagrinėsime atvejį, kai turime (3.1) diferencialinę lygtį ir (3.4), (3.5) nelokaliąsias sąlygas, kuriose $b_1 = -b_2 = 1$. Šiame poskyryje pristatysime skaitinio eksperimento rezultatus.

Norėdami ištirti nelokalaus uždavinio spektrą, ieškome visų tikrinių reikšmių (nulinės, neigiamų ir teigiamų). Svarbu ištirti, ar yra kompleksinių tikrinių reikšmių. Trumpai aprašysime, kaip ir kada atsiranda kompleksinės tikrinės reikšmės. Tuo tikslu tirsime kartotinių tikrinių reikšmių atsiradimo sritis.

Nulines tikrines reikšmes gauname iš (3.6) lygties. Ši lygtis aprašo hiperbolę (3.1 paveikslas). Jei taškas (γ_1, γ_2) priklauso šiai hiperbole, tuo atveju $\lambda = 0$ yra (3.1), (3.4), (3.5) uždavinio tikrinė reikšmė.

3.3 pav. Funkcija $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0,8$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_2$. Nėra šaknų intervale $\beta \in (0,\infty)$
Fig. 3.3. Function $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0,8$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_2$. There are no roots in the interval $\beta \in (0,\infty)$

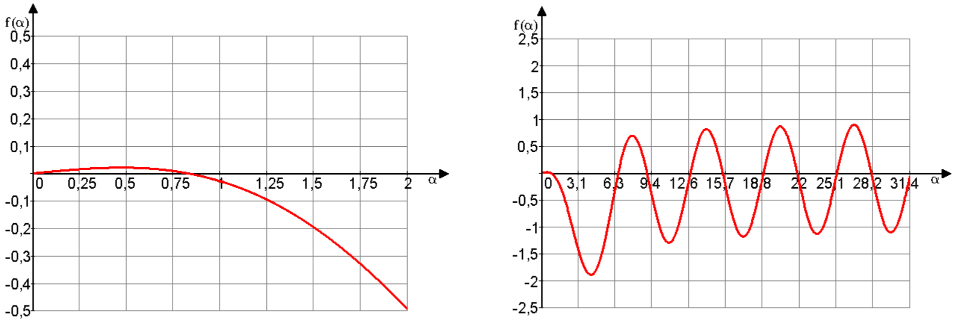


3.4 pav. Funkcija $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1,5$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_3$. Viena šaknis intervale $\beta \in (0,\infty)$
Fig. 3.4. Function $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1,5$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_3$. There is one root in the interval $\beta \in (0,\infty)$

Kaip buvo minėta anksčiau, hiperbolės (3.6) šakos visą koordinačių plokštumą (γ_1,γ_2) dalina į tris sritis S_1, S_2, S_3 (3.1 paveikslas, sritys S_1, S_2, S_3). Taškas $(\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0)$ priklauso sričiai S_2 (kai $b_1 = -b_2 = 1$). Skirtingoms b_1, b_2 reikšmėms taškas $(\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0)$ gali priklausyti ir kitoms sritims. Sritį S_2 nuo kitų sričių S_1 ir S_3 skiria hiperbolės šakos. Nagrinėjamu atveju reikšmėms γ_1 ir γ_2 iš srities S_2 nėra neigiamų tikrinių reikšmių. Reikšmėms (γ_1,γ_2) iš sričių S_1 ir S_3 (3.1), (3.4), (3.5) uždavinys turi vieną neigiamą tikrinę reikšmę, kuri yra gaunama iš (3.9) lygties. Kitaip tariant, kai kintant reikšmėms γ_1, γ_2 arba bent vienai iš jų taškas (γ_1,γ_2) pereina iš S_2 į S_1 (arba S_3), viena teigiama tikrinė reikšmė iš pradžių virsta nuline (kai (γ_1,γ_2) priklauso hiperbolei), o po to tampa neigiama tikrine reikšme.

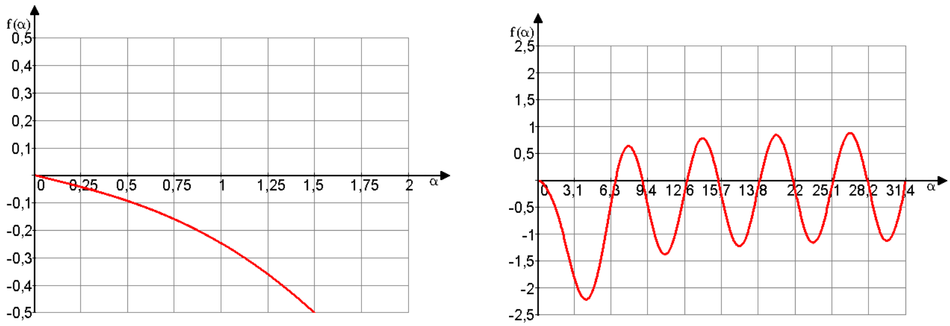
3.3 ir 3.4 paveiksluose pavaizduotas neigiamos tikrinės reikšmės atsiradimas. Šiuose paveiksluose funkcija $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$ yra (3.9) lygties kairioji pusė. Iš 3.3 ir 3.4 paveikslų galima matyti, kaip, keičiant parametro γ_2 reikšmę, atsiranda neigiama tikrinė reikšmė (3.4 paveikslas, kai $\gamma_2 > 1$).

3.5 ir 3.6 paveiksluose pavaizduotas funkcijos $f(\alpha,\gamma_1,\gamma_2)$ grafikas (kairė (3.8) lygties pusė). Iš (3.8) lygties gauname teigiamas tikrines reikšmes. Visos realios tikrinės reikšmės srityje S_2 yra teigiamos. Pastebime, kad srityse S_1 ir S_3 egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, o kitos realiosios tikrinės reikšmės yra teigiamos (3.3–3.6 paveikslai).



3.5 pav. Funkcija $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0,8$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ ir $\alpha \in (0, 10\pi)$. Yra 9 šaknys intervale $\alpha \in (0, 10\pi)$

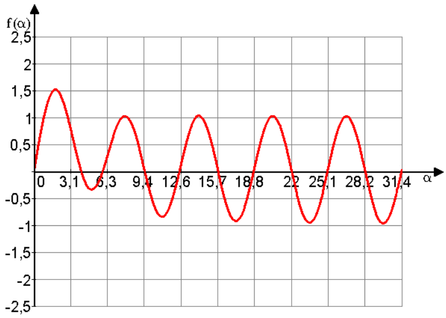
Fig. 3.5. Function $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0,8$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ and $\alpha \in (0, 10\pi)$. There are 9 roots in the interval $\alpha \in (0, 10\pi)$



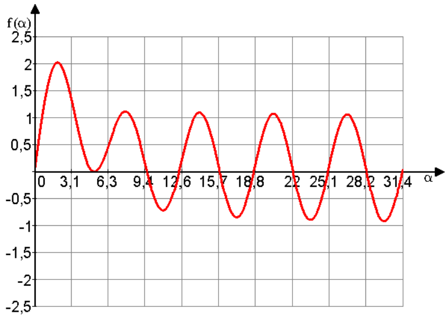
3.6 pav. Funkcija $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1,5$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_3$ ir $\alpha \in (0, 10\pi)$. Yra 8 šaknys intervale $\alpha \in (0, 10\pi)$

Fig. 3.6. Function $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1,5$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_3$ and $\alpha \in (0, 10\pi)$. There are 8 roots in the interval $\alpha \in (0, 10\pi)$

Paanalizuokime kompleksines tikrines reikšmes. Išsiaiškinkime, kada ir kaip tokios tikrinės reikšmės atsiranda. Naudojant kompiuterinį modeliavimą, galima pastebėti, kad egzistuoja kompleksinės tikrinės reikšmės. Tokią situaciją galime stebėti 3.7, 3.8, 3.9 ir 3.10 paveiksluose. Jei parametrų γ_1, γ_2 reikšmes keičiame taip, kad taškas (γ_1, γ_2) juda tolyn nuo taško $(0, 0)$ kokia nors kryptimi (NW arba SE kryptimis), tada dvi skirtingos realios šaknys (3.7 paveikslas) iš (3.8) lygties susilieja į vieną realią kartotinę šaknį (3.8 paveikslas). Jei keičiame parametrų γ_1, γ_2 reikšmes toliau, tai tada ši kartotinė šaknis, gauta iš (3.8) lygties, gali



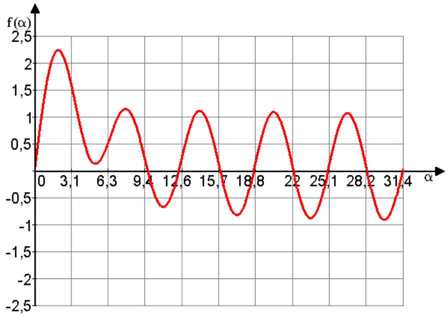
3.7 pav. Funkcija $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -3$; $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ ir $\alpha \in (0, 10\pi)$. Intervale $\alpha \in (0, \infty)$ nėra kompleksinių šaknų
Fig. 3.7. Function $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -3$; $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ and $\alpha \in (0, 10\pi)$. There are no complex in the interval $\alpha \in (0, \infty)$ roots



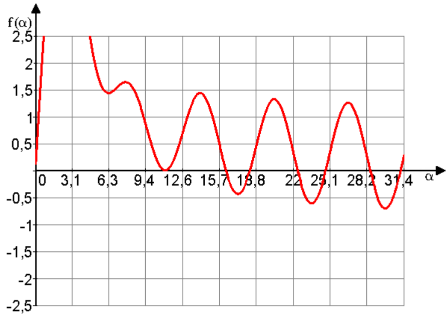
3.8 pav. Funkcija $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -3{,}977$; $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ ir $\alpha \in (0, 10\pi)$. Intervale $\alpha \in (0, \infty)$ yra viena kartotinė šaknis
Fig. 3.8. Function $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -3{,}977$; $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ and $\alpha \in (0, 10\pi)$. There is one multiple root in the interval $\alpha \in (0, \infty)$

pereiti į dvi jungtines kompleksines šaknis (3.9 paveikslas). Taip keičiant γ_1, γ_2 reikšmes, susidaro situacija, kai turėsime vieną kartotinę ar dvi kompleksines šaknis (3.10 paveikslas).

Norint išsamiau ištirti (3.1), (3.4), (3.5) nelokalaus uždavinio spektrą buvo atliktas skaitinis eksperimentas. Naudojant kompiuterinį modeliavimą, buvo gauta daug kartotinių ir kompleksinių tikrinių reikšmių iš (3.8) lygties srityje S_2 prie skirtingų nelokaliųjų sąlygų (3.11, 3.12 ir 3.13 paveikslai). Hiperbolės šakos rodo nulines tikrines reikšmes (juodos kreivės). Kitos kreivės (pilkos kreivės) atvaizduoja kartotines tikrines reikšmes. Pilka spalva pažymėtose srityse visos tikrinės reikšmės yra realios ir teigiamos. Čia nėra kompleksinių tikrinių reikšmių. Šios zonos žymi skirtuminių schemų parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumo sritį. 3.11, 3.12 ir 3.13 paveikslai rodo, kad stabilumo srities kontūras apibrėžiamas pakankamai sudėtingai. Visais trimis atvejais II ir IV koordinačių sistemos ketvirčiuose arti koordinačių pradžios nepavyko rasti stabilumo srities kontūro, t. y. kreivių, apribojančių šią sritį. Gauta, kad skirtuminio uždavinio spektras neturi neigiamų tikrinių reikšmių, esant pakankamai didelėms absoliučiu dydžiu γ_1 ir γ_2 reikšmėms, jei jos yra priešingų ženklų, o jų reikšmės absoliutiniu dydžiu yra artimos, pvz.: $\gamma_1 = -\gamma_2$.



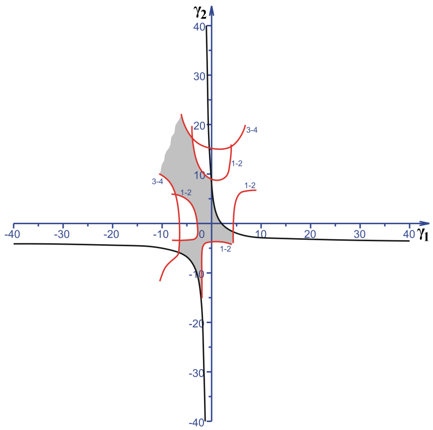
3.9 pav. Funkcija $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -4,4$; $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ ir $\alpha \in (0, 10\pi)$. Intervale $\alpha \in (0, \infty)$ yra 2 kompleksinės šaknys
Fig. 3.9. Function $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -4,4$; $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ and $\alpha \in (0, 10\pi)$. There are 2 complex roots in the interval $\alpha \in (0, \infty)$



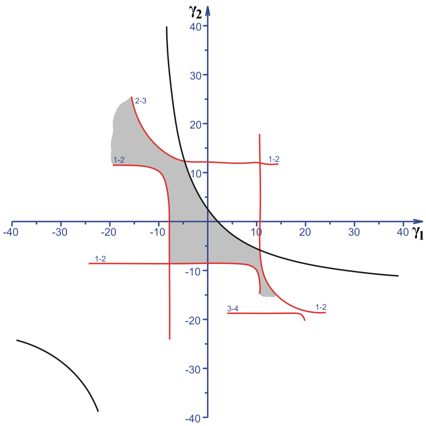
3.10 pav. Funkcija $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -10,1$; $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ ir $\alpha \in (0, 10\pi)$. Intervale $\alpha \in (0, \infty)$ yra kartotinė ir 2 kompleksinės šaknys
Fig. 3.10. Function $f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $b_1 = -b_2 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -10,1$; $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$ and $\alpha \in (0, 10\pi)$. There are 2 complex roots and one multiple root in the interval $\alpha \in (0, \infty)$

Taip pat iš šių paveikslų matyti, kad kai $b_1 \longrightarrow 0$ ir $b_2 \longrightarrow 0$, tai stabilumo sritis didėja, t. y. plečiasi ir artėja prie atvejo, kai $b_1 = b_2 = 0$, kuris buvo nagrinėtas pirmajame ir antrajame disertacijos skyriuose.

Iš atliktos išsamios analizės galime daryti išvadas, kad tiek diferencialinio, tiek skirtuminio operatoriaus spektras gali būti labai sudėtingas ir įdomus, priklausomai nuo parametrų γ_1, γ_2 iš nelokaliųjų integralinių sąlygų reikšmių. Tikrinių reikšmių tyrimas yra labai svarbus skirtuminių schemų parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumo analizei. Tokių skirtuminių schemų stabilumo tyrimas plačiau aptariamas šios disertacijos šeštajame skyriuje.



3.11 pav. Uždavinio (3.1), (3.4), (3.5) kartotinės teigiamos tikrinės reikšmės (pakankama stabilumo sritis), kai $b_1 = -b_2 = 1$
Fig. 3.11. Positive multiple eigenvalues of the problem (3.1), (3.4), (3.5) (sufficient stability area), when $b_1 = -b_2 = 1$



3.12 pav. Uždavinio (3.1), (3.4), (3.5) kartotinės teigiamos tikrinės reikšmės (pakankama stabilumo sritis), kai $b_1 = -b_2 = 0,2$
Fig. 3.12. Positive multiple eigenvalues of the problem (3.1), (3.4), (3.5) (sufficient stability area), when $b_1 = -b_2 = 0,2$

3.5. Apie vieną diferencialinį uždavinį su kintamais koeficientais

3.5.1. Diferencialinio uždavinio nagrinėjimas

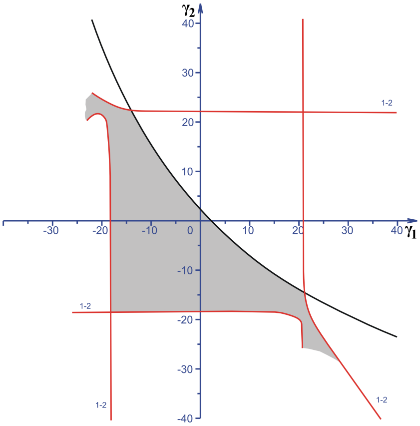
Nagrinėsime tikrinių reikšmių uždavinį (3.1) diferencialinei lygčiai su nelokaliosiomis sąlygomis

$$\alpha_1 u(0) = \gamma_1 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{3.10}$$

$$\alpha_2 u(1) = \gamma_2 \int_0^1 xu(x)\mathrm{d}x, \tag{3.11}$$

čia γ_1, γ_2, α_1, α_2 yra duoti parametrai.

Tokio tipo nelokaliosios sąlygos, kuriose integralai gali būti interpretuojami kaip nulinės ir pirmosios eilės momentai, sutinkamos techninio profilio taikomuosiuose uždaviniuose.



3.13 pav. Uždavinio (3.1), (3.4), (3.5) kartotinės teigiamos tikrinės reikšmės (pakankama stabilumo sritis), kai $b_1 = -b_2 = 0,05$
Fig. 3.13. Positive multiple eigenvalues of the problem (3.1), (3.4), (3.5) (sufficient stability area), when $b_1 = -b_2 = 0,05$

Naudodami prieš tai aptartą metodiką, tirsime tris (nulinės, neigiamų ir teigiamų) tikrinių reikšmių atvejus. Suformuluokime lemą apie (3.1), (3.10), (3.11) uždavinio nulinės tikrinės reikšmės egzistavimo sąlygas.

3.4 lema. Būtinos ir pakankamos sąlygos, kad (3.1), (3.10), (3.11) uždavinio tikrinė reikšmė būtų lygi nuliui, $\lambda = 0$, yra

$$\frac{\gamma_1\gamma_2}{12} - \frac{\alpha_2}{2}\gamma_1 - \frac{\alpha_1}{3}\gamma_2 + \alpha_1\alpha_2 = 0. \tag{3.12}$$

Įrodymas. Kadangi $\lambda = 0$, tai bendrasis (3.1) diferencialinės lygties sprendinys yra

$$u(x) = c_1x + c_2,$$

visoms laisvai parinktoms konstantoms c_1 ir c_2.

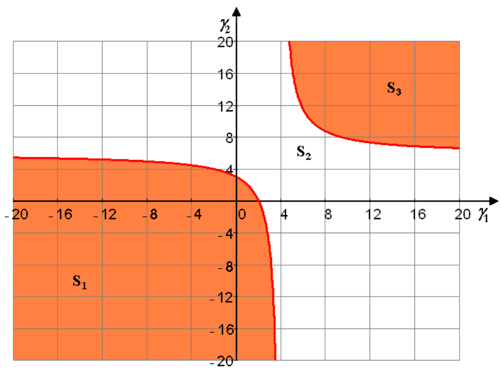
Įrašę šį sprendinį į (3.10) ir (3.11) nelokaliąsias sąlygas, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \alpha_1 c_2 = \gamma_1\left(\dfrac{c_1}{2} + c_2\right), \\ \\ \alpha_2(c_1 + c_2) = \gamma_2\left(\dfrac{c_1}{3} + \dfrac{c_2}{2}\right). \end{cases} \tag{3.13}$$

(3.1), (3.10), (3.11) uždavinio tikrinė reikšmė λ yra lygi nuliui, jei (3.13) lygčių sistema turi netrivialų sprendinį. Tuo tikslu (3.13) sistemos determinantą prilyginame nuliui

$$D = \begin{vmatrix} -\dfrac{\gamma_1}{2} & \alpha_1 - \gamma_1 \\ \\ \alpha_2 - \dfrac{\gamma_2}{3} & \alpha_2 - \dfrac{\gamma_2}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

o iš to seka, kad teisinga (3.12) lygtis. Lema įrodyta.



3.14 pav. Hiperbolė (3.12) ir sritys S_1, S_2, S_3, kai $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$
Fig. 3.14. Hyperbola (3.12) and areas S_1, S_2, S_3, when $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

(3.12) lygtis koordinačių plokštumoje (γ_1, γ_2) aprašo hiperbolę (3.5.1 paveikslas).

Suformuluosime išvadas apie nulinę tikrinę reikšmę:

- jei $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, tai nulinė tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja, kai taškas (γ_1, γ_2) priklauso hiperbolei;
- jei $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, tai $\lambda \neq 0$;
- jei $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, tai $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė, kai $\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{12} - \dfrac{1}{2}\gamma_1 = 0$,

t. y. $\gamma_2 = 6$;

- jei $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, tai $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė, kai $\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{12} - \dfrac{1}{3}\gamma_2 = 0$, t. y. $\gamma_1 = 4$.

Nagrinėkime teigiamas tikrines reikšmes.

3.5 lema. (3.1), (3.10), (3.11) diferencialinis uždavinys turi teigiamas tikrines reikšmes

$$\lambda_k = \alpha_k^2,$$

kai α_k yra lygties

$$-\gamma_1\gamma_2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\right) + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\right)\right) +$$
$$+\alpha_2\gamma_1\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right) + \alpha_1\gamma_2\left(\frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\right) + \alpha_1\alpha_2\sin\alpha = 0 \tag{3.14}$$

šaknys intervale $\alpha \in (0, \infty)$.

Įrodymas. Jei $\lambda > 0$, tai bendrasis (3.1) lygties sprendinys yra

$$u(x) = c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x,$$

čia $\alpha = \sqrt{\lambda} > 0$.

Šį sprendinį įrašome į (3.10) ir (3.11) nelokaliąsias integralines sąlygas. Turime spręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} \alpha_1 c_2 = \gamma_1\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}c_1 + \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha}c_2\right), \\[2ex] \alpha_2 c_1\cos\alpha + \alpha_2 c_2\sin\alpha = \\ = \gamma_2\left(c_1\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} - \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\right) + c_2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \dfrac{\cos\alpha}{\alpha}\right)\right). \end{cases}$$

Norėdami rasti nenulinį sprendinį, šios sistemos determinantą prilyginame nuliui ir, atlikę skaičiavimus, gauname lygtį (3.14). Lema įrodyta.

Išvada. Jei $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, tai lygtis (3.14) virsta

$$-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\right) - \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\right) = 0$$

lygtimi, kurią galima suvesti į dvi sekančias lygtis

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

iš kurių randame teigiamas tikrines reikšmes.

Ištirsime neigiamų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygas.

3.6 lema. (3.1), (3.10), (3.11) diferencialinis uždavinys turi neigiamas tikrines reikšmes

$$\lambda_k = -\beta_k^2,$$

kai $\beta_k > 0$ yra lygties

$$\gamma_1\gamma_2\left(\frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta}\left(\frac{\mathrm{ch}\beta}{\beta} - \frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta^2}\right) + \frac{1-\mathrm{ch}\beta}{\beta}\left(\frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta} + \frac{1-\mathrm{ch}\beta}{\beta^2}\right)\right) -$$
$$-\alpha_2\gamma_1\left(\frac{1-\mathrm{ch}\beta}{\beta}\mathrm{ch}\beta + \frac{\sin^2\beta}{\beta}\right) - \alpha_1\gamma_2\left(\frac{\mathrm{ch}\beta}{\beta} - \frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta^2}\right) + \alpha_1\alpha_2\mathrm{sh}\beta = 0 \tag{3.15}$$

šaknys intervale $\beta \in (0, \infty)$.

Lemos įrodymas yra analogiškas kaip ir prieš tai nagrinėtos 3.5 lemos.

Išvada. Jei $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, tai (3.15) lygtis įgauna pavidalą

$$\frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta}\left(\frac{\mathrm{ch}\beta}{\beta} - \frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta^2}\right) + \frac{1-\mathrm{ch}\beta}{\beta}\left(\frac{\mathrm{sh}\beta}{\beta} + \frac{1-\mathrm{ch}\beta}{\beta^2}\right) = 0.$$

Šiuo atveju nėra neigiamų tikrinių reikšmių. Tai galima įrodyti iš lygčių

$$\mathrm{sh}\frac{\beta}{2} = 0, \quad \mathrm{th}\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Ištyrus visas (3.1), (3.10), (3.11) diferencialinio uždavinio tikrines reikšmes, seka, kad nulinę, neigiamas ir teigiamas tikrines reikšmes gauname atitinkamai iš (3.12), (3.14), (3.15) lygčių.

Paanalizuokime hiperbolės reikšmę šio uždavinio atveju. Taškuose, priklausančiuose hiperbolės šakoms (3.12), egzistuoja nulinė tikrinė reikšmė, tai seka iš 3.4 lemos. Dvi hiperbolės šakos dalina visą koordinačių plokštumą (γ_1, γ_2) į tris neapibrėžtas sritis S_1, S_2, S_3 (3.5.1 paveikslas). Taškas $(\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0)$ yra srityje S_1. Visos realiosios tikrinės reikšmės šioje srityje yra skirtingos ir teigiamos. Srityje S_2 egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, o srityje S_3 – dvi neigiamos tikrinės reikšmės. Visos kitos realiosios tikrinės reikšmės, esančios srityse S_2 ir S_3, yra teigiamos.

3.5.2. Skirtuminio uždavinio tyrimas

Nagrinėjamą (3.1), (3.10), (3.11) diferencialinį uždavinį spręsime baigtinių skirtumų metodu. Šį uždavinį aproksimuojame skirtuminių lygčių sistema

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0, i = 1, 2, ..., N-1, \tag{3.16}$$

$$\alpha_1 u_0 = \gamma_1 h \left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right), \tag{3.17}$$

$$\alpha_2 u_N = \gamma_2 h \left(\frac{u_N}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} khu_k \right). \tag{3.18}$$

Tirsime šio skirtuminio uždavinio spektrą, t. y. rasime visas (3.16)–(3.18) uždavinio tikrines reikšmes. Kaip ir diferencialiniam, taip ir skirtuminiam uždaviniui nagrinėsime tris atvejus. Suformuluosime lemas apie nulinės, teigiamų ir neigiamų tikrinių reikšmių egzistavimą.

1 atvejis: $\lambda = 0$. Rasime sąlygas, su kuriomis $\lambda = 0$ yra (3.16)–(3.18) uždavinio tikrinė reikšmė.

3.7 lema. Būtinos ir pakankamos sąlygos, kad (3.16)–(3.18) uždavinio tikrinė reikšmė būtų lygi nuliui, $\lambda = 0$, yra

$$\gamma_1\gamma_2\left(\frac{1}{12} + \frac{h^2}{6}\right) - \frac{\alpha_2}{2}\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2\left(\frac{1}{3} + \frac{h^2}{6}\right) + \alpha_1\alpha_2 = 0. \tag{3.19}$$

Įrodymas. Kadangi $\lambda = 0$, tai bendrasis (3.16) skirtuminės lygties sprendinys yra

$$u(x) = c_1 ih + c_2, \quad i = 1, 2, ..., N$$

visoms laisvai parinktoms konstantoms c_1 ir c_2.

Įrašome šį sprendinį į (3.17), (3.18) sąlygas ir gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} \alpha_1 c_2 = \gamma_1\left(\dfrac{c_1}{2} + c_2\right), \\[2ex] \alpha_2(c_1 + c_2) = \gamma_2 c_1\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{h^2}{6}\right) + \gamma_2 c_2 \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Šios sistemos determinantą prilyginame nuliui

$$D = \begin{vmatrix} -\dfrac{\gamma_1}{2} & \alpha_1 - \gamma_1 \\[2ex] \alpha_2 - \gamma_2\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{h^2}{6}\right) & \alpha_2 - \dfrac{\gamma_2}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Iš čia seka, kad teisinga (3.19) lygtis. Lema įrodyta.

2 atvejis: $\lambda > 0$. Teigiamų tikrinių reikšmių nagrinėjimas.

3.8 lema. (3.16)–(3.18) uždavinys turi teigiamas tikrines reikšmes, priklausančias nuo parametrų γ_1, γ_2 reikšmių,

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha_k h}{2},$$

kai α_k yra lygties

$$\begin{aligned} &-\gamma_1\gamma_2\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}A^2 - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}AB + \frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha^2}A^2 - \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\alpha^3}AB\right) + \\ &+\alpha_2\gamma_1 A\left(\frac{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right) + \alpha_1\gamma_2\left(\frac{\cos\alpha}{\alpha}A - \frac{\sin\alpha}{\alpha^2}B\right) + \\ &+\alpha_1\alpha_2\sin\alpha = 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

čia $A = 1/\frac{2}{\alpha h}\mathrm{tg}\frac{\alpha h}{2}$, $B = 1/\frac{4}{\alpha^2 h^2}\sin^2\frac{\alpha h}{2}$,
šaknys intervale $\alpha \in (0, 4/h^2)$.

Įrodymas. (3.16) skirtuminę lygtį perrašome pavidalu

$$u_{i-1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right)u_i + u_{i+1} = 0.$$

Jei $\lambda > 0$, tai $1 - \frac{h^2\lambda}{2} < 1$. Nagrinėsime atvejį, kai $|1 - \frac{h^2\lambda}{2}| < 1$. Įvedame pažymėjimą: $\cos\alpha h = 1 - h^2\lambda/2$.

Iš to seka
$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha_k h}{2}.$$

Bendrasis (3.16) lygties sprendinys yra
$$u_i = c_1\cos(\alpha i h) + c_2\sin(\alpha i h).$$

Įrašę šią išraišką į (3.17), (3.18) nelokaliąsias integralines sąlygas ir atlikę skaičiavimus, gauname
$$\begin{cases} \left(\alpha_1 - \gamma_1\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}A\right)c_1 - \gamma_1\dfrac{(1-\cos\alpha)}{\alpha}Ac_2 = 0, \\ \left(\alpha_2\cos\alpha - \gamma_2\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}A + \gamma_2\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}B\right)c_1 + \left(\alpha_2\sin\alpha - \gamma_2\dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2}B + \right. \\ \left. +\gamma_2\dfrac{\cos\alpha}{\alpha}A\right)c_2 = 0, \end{cases}$$

čia $A = 1/\frac{2}{\alpha h}\mathrm{tg}\frac{\alpha h}{2}$, $B = 1/\frac{4}{\alpha^2 h^2}\sin^2\frac{\alpha h}{2}$.

Iš šios sistemos gauname tokio pavidalo determinantą, kurį prilyginame nuliui, norėdami rasti nenulinį sprendinį
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \gamma_1 A\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} & -\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha}\gamma_1 A \\ \alpha_2\cos\alpha - \gamma_2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}A - \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}B\right) & \alpha_2\sin\alpha + \gamma_2\left(\dfrac{\cos\alpha}{\alpha}A - \dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2}B\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Iš čia gauname (3.20) lygtį. Lema įrodyta.

3 atvejis: $\lambda < 0$. Suformuluokime lemą apie (3.16)–(3.18) uždavinio neigiamų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygas.

3.9 lema. (3.16)–(3.18) skirtuminis uždavinys turi neigiamas tikrines reikšmes
$$\lambda_k = -\frac{4}{h^2}\mathrm{sh}^2\frac{\beta_k h}{2},$$

kai $\beta_k > 0$ yra lygties

$$\gamma_1\gamma_2\left(\frac{\text{sh}\beta}{\beta}\left(\frac{\text{ch}\beta}{\beta}A^2-\frac{\text{sh}\beta}{\beta^2}AB\right)+\frac{1-\text{ch}\beta}{\beta}\left(\frac{\text{sh}\beta}{\beta}A^2+\frac{1-\text{ch}\beta}{\beta^2}AB\right)\right)-$$
$$-\alpha_2\gamma_1 A\left(\frac{\text{sh}^2\beta}{\beta}+\frac{1-\text{ch}\beta}{\beta}\text{ch}\beta\right)-\alpha_1\gamma_2\left(\frac{\text{ch}\beta}{\beta}A-\frac{\text{sh}\beta}{\beta^2}B\right)+\alpha_1\alpha_2\text{sh}\beta=0, \tag{3.21}$$

šaknys intervale $\beta\in(0,\infty)$.

Lemos įrodymas analogiškas lemos 3.8 įrodymui.

Jei αh yra pakankamai mažas teigiamas skaičius, tai $A(\alpha h)\approx 1$, $B(\alpha h)\approx 1$. Tada, kai h pakankamai mažas teigiamas skaičius, tai (3.20) lygties sprendinys artėja į (3.14) lygties, kuri gauta 3.5 lemoje, sprendinį. Tokią pačią išvadą galime daryti ir apie neigiamas tikrines reikšmes, t. y. jei h yra pakankamai mažas teigiamas skaičius, tai (3.21) lygties sprendinys artėja į (3.14) lygties, iš 3.6 lemos, sprendinį.

Diferencialiniam uždaviniui (3.14) lygtis turi be galo daug šaknų intervale $(0,\infty)$, t. y. (3.1), (3.10), (3.11) uždavinys turi be galo daug tikrinių reikšmių. Kai nagrinėjamas (3.16)–(3.18) skirtuminis uždavinys, tai (3.20) lygtis turi baigtinį skaičių šaknų intervale $(0,N\pi)$ ir šis šaknų skaičius nėra didesnis nei $N-1$. Taigi tiriant (3.16)–(3.18) skirtuminį uždavinį galime rasti visas (nulinę, teigiamas, neigiamas) tikrines reikšmes, atitinkamai iš (3.19), (3.20), (3.21) lygčių.

3.6. Trečiojo skyriaus išvados

- Išnagrinėtas tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su kintamo svorio integralinėmis sąlygomis. Išanalizuota spektro struktūros priklausomybė nuo parametrų γ_1, γ_2 reikšmių. Įrodytos lemos apie nulinės, neigiamų ir teigiamų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygas. Apibrėžta ir išanalizuota hiperbolės reikšmė tikrinių reikšmių pasiskirstymui ir stabilumo analizei.

- Šiame skyriuje aprašytas ir išnagrinėtas skaitinis eksperimentas neigiamoms, teigiamoms, kartotinėms ir kompleksinėms tikrinėms reikšmėms rasti. Apibrėžta sritis, kurioje visos tikrinės reikšmės yra realios ir teigiamos.

4

Diferencialinė lygtis su kintamais koeficientais

4.1. Diferencialinė lygtis su kintamais koeficientais

Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis ir kintamais koeficientais, kai kintami koeficientai yra diferencialinėje lygtyje, mokslinėje literatūroje nėra plačiai išnagrinėtas uždavinys. Yra ištirti tik kai kurie atskiri atvejai (Bandirskii *et al.* 2006; Bandirskii and Makarov 2000; Ionkin and Valikova 1996; Sajavicius and Sapagovas 2009; Shkalikov 1982).

S. Sajavičiaus, M. Sapagovo (2009), N. I. Ionkino, E. A. Valikovos (1996) straipsniuose nagrinėjami nelokalieji tikrinių reikšmių uždaviniai su kintamais koeficientais, esančiais diferencialinėje lygtyje.

S. Sajavičiaus, M. Sapagovo straipsnyje (2009) aprašytas tikrinių reikšmių uždavinio

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big) &= \lambda u, 0 < x < 1,\\
u(0) &= \gamma_1 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x,\\
u(1) &= \gamma_2 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

čia $p(x) > p_0 \geq 0$, $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$, tyrimas.

Diferencialinis uždavinys suvedamas į skirtuminių lygčių sistemą ir ji analizuojama. Pateikiami skaitinio eksperimento rezultatai, kurio metu buvo tiriamas skirtuminio uždavinio spektras prie tam tikrų kintamųjų koeficientų reikšmių.

Ketvirtajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys vienmačiam diferencialiniam operatoriui su kintamais koeficientais ir nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Pradžioje teoriškai nagrinėjama tikrinių reikšmių priklausomybė nuo funkcijos $p(x)$ tipo (simetrinė, monotoniškai didėjanti ar monotoniškai mažėjanti). Vėliau šis uždavinys sprendžiamas skaitiškai. Taip pat atlikta analizė, kaip tikrinės reikšmės priklauso nuo parametrų γ_1, γ_2 reikšmių iš nelokaliųjų sąlygų. Įrodytos kelios šio uždavinio spektro savybės. Nagrinėjami atvejai, kada atsiranda nulinė, neigiamos ir teigiamos tikrinės reikšmės. Analizuojama kartotinių ir kompleksinių tikrinių reikšmių atsiradimo ir egzistavimo sritys. Aptarti skaitinio eksperimento rezultatai.

4.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime tikrinių reikšmių uždavinį vienmačiam diferencialiniam operatoriui su kintamais koeficientais ir nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big) + \lambda u = 0, 0 < x < 1, \tag{4.1}$$

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

$$u(1) = \gamma_2 \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x, \tag{4.3}$$

čia $p(x) \in C^1[0,1]$, $p(x) > 0$.

Šiame disertacijos skyriuje tiriama diferencialinė lygtis su kintamais koeficientais. Nagrinėjama nulinė tikrinė reikšmė. Randamos šios tikrinės reikšmės egzistavimo sąlygos. Kelios išvados suformuluojamos kaip lemos. Pateikiamas algoritmas charakteristinėms funkcijoms rasti panaudojant Perkelties metodą. Įrodomos spektro savybės nagrinėjamam diferencialiniam uždaviniui. Pateikiami skaitinio eksperimento, naudojant kompiuterinį modeliavimą, rezultatai.

4.3. Tikrinių reikšmių uždavinys. Nulinė tikrinė reikšmė

Didelį dėmesį skirsime nulinei tikrinei reikšmei, nes ji teikia daug informacijos apie skirtuminių metodų parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumą (Jesevičiūtė and Sapagovas 2008; Sapagovas 2008). Nagrinėsime, kada $\lambda = 0$ yra (4.1)–(4.3) uždavinio tikrinė reikšmė. Tuo tikslu nagrinėjamas šio uždavinio bendrasis sprendinys

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \tag{4.4}$$

kuriame $u_1(x)$, $u_2(x)$ yra du tiesiškai nepriklausomi (4.1)–(4.3) uždavinio sprendiniai. Apibrėžkime šiuos sprendinius nusakančius uždavinius:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\right) = 0,$$

$$u_1(0) = 1, u_1(1) = 0, \qquad u_2(0) = 0, u_2(1) = 1.$$

Iš čia nesunkiai randame $u_1(x)$, $u_2(x)$ išraiškas:

$$u_1(x) = \frac{F(1) - F(x)}{F(1)}, \qquad u_2(x) = \frac{F(x)}{F(1)}; \tag{4.5}$$

čia

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}.$$

Nagrinėjamu atveju sprendiniai priklausomi nuo funkcijos $p(x)$ reikšmės iš diferencialinės lygties (4.1). Šiuos sprendinius (4.5) naudosime lemos įrodymui.

4.1 lema. Būtina ir pakankama sąlyga, kad $\lambda = 0$ būtų (4.1)–(4.3) diferencialinio uždavinio tikrinė reikšmė, yra

$$\gamma_1 \int_0^1 u_1(x)\mathrm{d}x + \gamma_2 \int_0^1 u_2(x)\mathrm{d}x - 1 = 0. \tag{4.6}$$

Įrodymas. Įrašę (4.4) bendrąjį sprendinį į (4.2) ir (4.3) nelokaliąsias integralines sąlygas, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0) = \gamma_1 c_1 \int\limits_0^1 u_1(x)\mathrm{d}x + \gamma_1 c_2 \int\limits_0^1 u_2(x)\mathrm{d}x, \\ c_1 u_1(1) + c_2 u_2(1) = \gamma_2 c_1 \int\limits_0^1 u_1(x)\mathrm{d}x + \gamma_2 c_2 \int\limits_0^1 u_2(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Šią sistemą galima perrašyti kitu pavidalu:

$$\begin{cases} \Big(1 - \gamma_1 \int\limits_0^1 u_1(x)\mathrm{d}x\Big) c_1 - \Big(\gamma_1 \int\limits_0^1 u_2(x)\mathrm{d}x\Big) c_2 = 0, \\ -\Big(\gamma_2 \int\limits_0^1 u_1(x)\mathrm{d}x\Big) c_1 + \Big(1 - \gamma_2 \int\limits_0^1 u_2(x)\mathrm{d}x\Big) c_2 = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

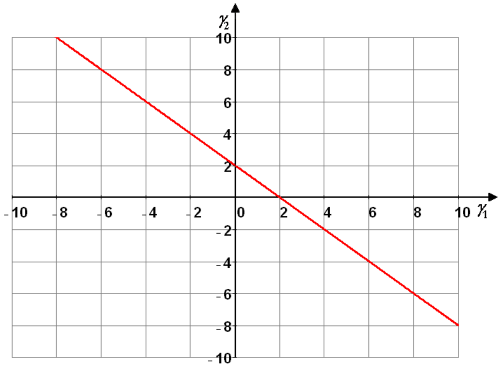
Diferencialinio uždavinio (4.1)–(4.3) tikrinė reikšmė yra lygi nuliui, jei (4.7) sistema turi netrivialų sprendinį. Šiuo atveju (4.7) sistemos determinantas turi būti lygus nuliui

$$\begin{vmatrix} 1 - \gamma_1 \int\limits_0^1 u_1(x)\mathrm{d}x & -\gamma_1 \int\limits_0^1 u_2(x)\mathrm{d}x \\ -\gamma_2 \int\limits_0^1 u_1(x)\mathrm{d}x & 1 - \gamma_2 \int\limits_0^1 u_2(x)\mathrm{d}x \end{vmatrix} = 0.$$

Iš to gauname lygtį (4.6). Lema įrodyta.

Pastaba. (4.6) formulės ir 4.1 lemos įrodymo metodika yra artima straipsnio (Čiegis et al. 2001) rezultatams; tik šiame straipsnyje nenagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys.

Iš 4.1 lemos seka, kad nulinė tikrinė reikšmė priklauso nuo parametrų γ_1, γ_2 reikšmių iš nelokaliųjų sąlygų ir funkcijos $p(x)$. Srityje (γ_1, γ_2) gauname tiesę iš (4.6) lygties, kuri dalina visą sritį į dvi dalis (4.3 paveikslas). Vienoje iš šių sričių yra taškas ($\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$). Šioje srityje visos realios tikrinės reikšmės yra teigiamos. Kitoje srityje nagrinėjamas uždavinys turi vieną neigiamą tikrinę reikšmę. Kitos realiosios tikrinės reikšmės yra teigiamos. Taip pat gali atsirasti kompleksinių tikrinių reikšmių.



4.1 pav. Funkcijos (4.6) grafikas
Fig. 4.1. Graph of the function (4.6)

Nurodysime kai kurias funkcijos $F(x)$ savybes, kurias vėliau panaudosime 4.3 lemos įrodymui.

4.2 lema. Jei $p(x) = p(1-x)$, tai teisingos tokios lygybės:

$$F(x) = F(1) - F(1-x), \tag{4.8}$$

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F(1). \tag{4.9}$$

Įrodymas. Turime

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}.$$

Šiame integrale atlikę kintamųjų pakeitimą $s = 1 - y$, gauname

$$F(x) = -\int_1^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{p(1-y)} = \int_{1-x}^1 \frac{\mathrm{d}y}{p(y)} =$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{p(y)} - \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{p(y)} = F(1) - F(1-x).$$

Toliau

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 F(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{1/2} F(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1/2}^1 F(x)\mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_0^{1/2} F(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1/2}^1 (F(1) - F(1-x))\mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_0^{1/2} F(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}F(1) - \int\limits_{1/2}^1 F(1-x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Atskirai pertvarkome (4.10) lygybės dešiniosios pusės paskutinįjį integralą, pakeisdami integravimo kintamąjį $x = 1 - y$. Gauname

$$\int_{1/2}^1 F(1-x)\mathrm{d}x = -\int_{1/2}^0 F(y)\mathrm{d}y = \int_0^{1/2} F(y)\mathrm{d}y.$$

Įrašę šią išraišką į (4.10)lygybę, gauname (4.9). Lema įrodyta.

Suformuluokime išvadas apie nulinės tikrinės reikšmės priklausomybę nuo funkcijos $p(x)$ tipo.

4.3 lema. Sekantys teiginiai yra teisingi:

- jei funkcija $p(x)$ yra simetrinė taško $x = \dfrac{1}{2}$ atžvilgiu $(p(x) = p(1-x))$, tai $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė, kai $\dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - 1 = 0$;
- jei funkcija $p(x)$ yra monotoniškai didėjanti $(p'(x) > 0)$, tai $\exists\ a \in (1/2, 1)$, kad $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė, kai $\gamma_1(1-a) + \gamma_2 a - 1 = 0$, $\dfrac{1}{2} < a < 1$;
- jei funkcija $p(x)$ yra monotoniškai mažėjanti $(p'(x) < 0)$, tai $\exists\ a \in (1/2, 1)$, kad $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė, kai $\gamma_1 a + \gamma_2(1-a) = 0$, $\dfrac{1}{2} < a < 1$.

Įrodymas.

Pirmojo teiginio įrodymas. Iš 4.1 lemos (4.6) nulinės tikrinės reikšmės egzistavimo sąlygos ir 4.5 išraiškų turime, kad

$$\gamma_1 \frac{F(1) - \int\limits_0^1 F(x)\mathrm{d}x}{F(1)} + \gamma_2 \frac{\int\limits_0^1 F(x)\mathrm{d}x}{F(1)} - 1 = 0.$$

Funkcija $p(x)$ yra simetrinė taško $x = \frac{1}{2}$ atžvilgiu ($p(x) = p(1-x)$). Tada pasinaudoję 4.2 lemos (4.9) formule, gauname $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - 1 = 0$. Teiginys įrodytas.

Antrojo teiginio įrodymas. Kai funkcija $p(x)$ yra monotoniškai didėjanti ($p'(x) > 0$), tai

$$F'(x) = \frac{1}{p(x)} > 0, \qquad F''(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)^2} < 0,$$

$F(x)$ yra monotoniškai didėjanti iškyla funkcija intervale $(0, 1)$, su sąlyga $F(0) = 0$. Todėl

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{2}F(1), \qquad \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x < F(1).$$

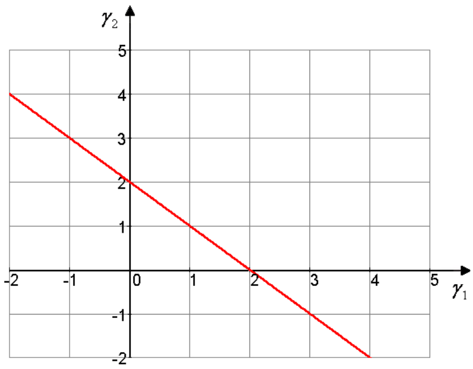
Pasinaudoję šiomis savybėmis, turime

$$\frac{1}{2} < \frac{\int\limits_0^1 F(x)\mathrm{d}x}{F(1)} < 1, \qquad 0 < \frac{F(1) - \int\limits_0^1 F(x)\mathrm{d}x}{F(1)} < \frac{1}{2}.$$

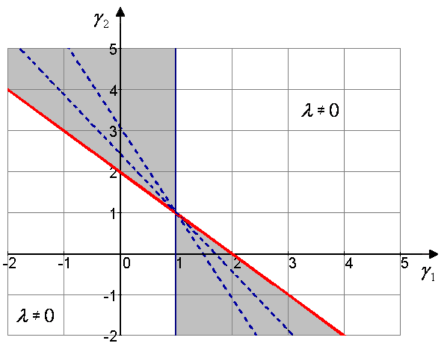
Pažymėję pirmu atveju $\int\limits_0^1 F(x)\mathrm{d}x = 1 - a$, o antruoju atveju $F(1) - \int\limits_0^1 F(x)\mathrm{d}x = 1 - a$, gauname ir antro teiginio įrodymą, t. y., kad $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė, kai $\gamma_1(1-a) + \gamma_2 a - 1 = 0$, $\frac{1}{2} < a < 1$.

Trečiojo teiginio įrodymas. Kai funkcija $p(x)$ yra monotoniškai mažėjanti ($p'(x) < 0$), tai teiginio apie nulinės tikrinės reikšmės egzistavimo sąlygas įrodymas yra analogiškas prieš tai aptartam. Tik čia gauname, kad $\lambda = 0$ yra tikrinė reikšmė, kai $\gamma_1 a + \gamma_2(1-a) - 1 = 0$, $\frac{1}{2} < a < 1$.

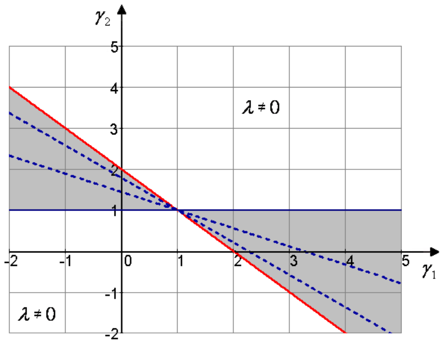
4.3, 4.3 ir 4.4 paveiksluose galima stebėti keletą tiesių pavyzdžių. 4.3 paveiksle atvaizduotas atvejis, kai funkcija $p(x)$ yra simetrinė; 4.3 paveiksle, kai



4.2 pav. Simetrinė funkcija $(p(x) = p(1-x))$
Fig. 4.2. Symmetrical function $(p(x) = p(1-x))$



4.3 pav. $p(x)$ – monotoniškai mažėjanti funkcija, $p'(x) < 0$
Fig. 4.3. $p(x)$ – monotonous decreasing function, $p'(x) < 0$



4.4 pav. $p(x)$ – monotoniškai didėjanti funkcija, $p'(x) > 0$
Fig. 4.4. $p(x)$ – monotonous increasing function, $p'(x) > 0$

$p(x)$ – monotoniškai mažėjanti funkcija; 4.4 paveiksle, monotoniškai didėjanti funkcija. Visos šios tiesės kerta tašką $(1, 1)$. Kai γ_1, γ_2 priklauso pilkai sričiai, tai $\lambda = 0$ gali būti (4.1)–(4.3) uždavinio tikrinė reikšmė (4.3 ir 4.4 paveikslai).

Nagrinėkime (4.1)–(4.3) uždavinį ir atskirą atvejį, kai funkcija $p(x) = 1$. Šiuo atveju užrašykime nulinės reikšmės egzistavimo sąlygas (2 skyriaus 2.3.1 lema).

Tarkime, $p(x) = 1$, tada būtinos ir pakankamos sąlygos, kad (4.1)–(4.3) diferencialinio uždavinio tikrinė reikšmė būtų lygi nuliui, $\lambda = 0$, yra

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} - 1 = 0. \tag{4.11}$$

Remiantis 4.2, 4.3 lemomis galime prieiti prie išvados, kad nulinės tikrinės reikšmės egzistavimo sąlyga, kai funkcija $p(x)$ yra simetrinė, sutampa su uždavinio su pastoviais koeficientais $(p(x) = 1)$ nulinės tikrinės reikšmės egzistavimo sąlyga.

4.4. Kiti rezultatai

Nagrinėkime atvejį, kai funkcija $p(x)$ yra bendro pavidalo funkcija. Sudarysime skaitinį algoritmą, kaip galima tirti (4.1)–(4.3) uždavinio spektro struktūrą. Šiam tikslui buvo atliktas didelis skaitinis eksperimentas su įvairiomis funkcijomis $p(x)$. Tikrinėms reikšmėms rasti buvo sudarytas algoritmas panaudojant perkelties metodą. Pradžioje (4.1) diferencialinę lygtį ir (4.2), (4.3) nelokaliąsias sąlygas aproksimuojame skirtuminių lygčių sistema

$$\frac{p_{i-1/2}u_{i-1} - (p_{i-1/2} + p_{i+1/2})u_i + p_{i+1/2}u_{i+1}}{h^2} + \lambda_i u_i = 0, \tag{4.12}$$
$$i = 1, 2, ..., N-1$$

$$u_0 = \gamma_1 h\Big(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i\Big) \equiv \gamma_1 l(u_i), \tag{4.13}$$

$$u_N = \gamma_2 h\Big(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i\Big) \equiv \gamma_2 l(u_i). \tag{4.14}$$

Tiriame atvejus, kada egzistuoja nulinė, neigiamos ir teigiamos tikrinės reikšmės. Šiuo nagrinėjamu atveju funkcija $p(x)$ yra su kintamais koeficientais. Pirmiausia aprašysime nulinės tikrinės reikšmės egzistavimo sąlygą. Nagrinėjamas (4.12)–(4.14) skirtuminis uždavinys. Užrašykime (4.12) lygties bendrąjį sprendinį u_i:

$$u_i = c_1 u_i^1 + c_2 u_i^2, i = 0, ..., N. \tag{4.15}$$

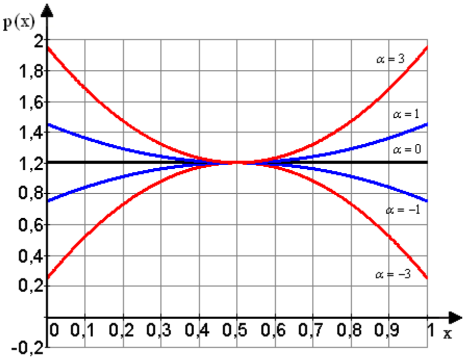
Kai $p(x)$ – laisvai parinkta funkcija, gali būti sunku (ar neįmanoma) užrašyti sprendinių u_i^1 ir u_i^2, $i = 1, ..., N-1$ analizines išraiškas. Reikia surasti sprendinius u_i^1 ir u_i^2 apytiksliai. Juos galima rasti sprendžiant štai tokius du skirtuminius uždavinius:

$$\begin{cases} a_i u_{i-1}^1 - b_i u_i^1 + c_i u_{i+1}^1 = 0, \\ u_0^1 = 1, u_N^1 = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

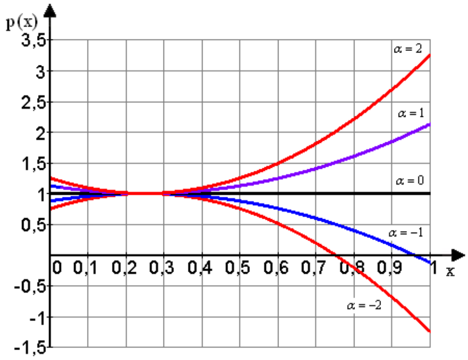
ir

$$\begin{cases} a_i u_{i-1}^2 - b_i u_i^2 + c_i u_{i+1}^2 = 0, \\ u_0^2 = 0, u_N^2 = 1; \end{cases} \tag{4.17}$$

čia $a_i = p_{i-1/2}$, $b_i = p_{i-1/2} + p_{i+1/2}$, $c_i = p_{i+1/2}$.



4.5 pav. Funkcija $p(x) = \alpha(x-1)x + \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$
Fig. 4.5. Function $p(x) = \alpha(x-1)x + \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$



4.6 pav. Funkcija $p(x) = \alpha(2x^2 - x) + (1 + \frac{\alpha}{8})$
Fig. 4.6. Function $p(x) = \alpha(2x^2 - x) + (1 + \frac{\alpha}{8})$

Perkelties metodas naudojamas šioms dviems sistemoms išspręsti. Tuo būdu gaunami sprendiniai u_i^1, $i = 0, ..., N$ iš sistemos (4.16) ir sprendiniai u_i^2, $i = 0, ..., N$ iš (4.17). Šie du sprendiniai sudaro bendrąjį (4.12) skirtuminės lygties sprendinį. Įrašę šį bendrąjį sprendinį į (4.13), (4.14) nelokaliąsias integralines sąlygas, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_1 = \gamma_1 c_1 l(u_i^1) + \gamma_1 c_2 l(u_i^2), \\ c_2 = \gamma_2 c_1 l(u_i^1) + \gamma_2 c_2 l(u_i^2). \end{cases}$$

4.1 lentelė. Teigiamos tikrinės reikšmės, kai $p(x)$ – simetrinė funkcija ($p(x) = \alpha(x-1)x + \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$)
Table 4.1. Positive eigenvalues, when $p(x)$ – symmetrical function ($p(x) = \alpha(x-1)x + \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$)

α	λ_2	λ_4
-4	38,8	114,2
-3	52	153,9
-2	60,2	180,7
-1	66,8	202,1
-0,5	69,5	211,8
-0,2	71,2	217,1
-0,1	71,8	219
0	72,1	220,6
0,1	72,7	222,4
1	77,1	237,2
1,5	79,4	245,1
2	81,65	252,5

4.2 lentelė. Neigiamos tikrinės reikšmės, kai $p(x)$ – simetrinė funkcija ($p(x) = \alpha(x-1)x + \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$)
Table 4.2. Negative eigenvalues, when $p(x)$ – symmetrical function ($p(x) = \alpha(x-1)x + \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)$)

α	λ
-4	-2,9
-3	-6,7
-2	-9,7
-1	-12,3
-0,5	-13,6
-0,2	-14,3
-0,1	-14,6
0	-14,8
0,1	-15,1
1	-17,28
1,5	-18,4
2	-19,6

Šios sistemos determinantas turi būti lygus nuliui, kad $\lambda = 0$ būtų (4.12)–(4.14) uždavinio tikrinė reikšmė

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \gamma_1 l(u_i^1) & -\gamma_1 l(u_i^2) \\ -\gamma_2 l(u_i^1) & 1 - \gamma_2 l(u_i^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Visą atliktą analizę galima apibendrinti suformuluota išvada.

4.1 išvada. Būtina ir pakankama sąlyga, kad $\lambda = 0$ būtų (4.12)–(4.14) skirtuminio uždavinio tikrinė reikšmė yra:

$$-\gamma_1 l(u_i^1) - \gamma_2 l(u_i^2) + 1 = 0. \tag{4.18}$$

Tuo pačiu metodu randame neigiamų tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygą. Šiuo atveju $\lambda < 0$. Kai $\lambda < 0$, tai bendrasis (4.12) skirtuminės lygties sprendinys

4.3 lentelė. Teigiamos tikrinės reikšmės, kai $p(x)$ – nesimetrinė funkcija $(p(x) = \alpha(2x^2 - x) + (1 + \frac{\alpha}{8}))$
Table 4.3. Positive eigenvalues, when $p(x)$ – nonsymmetrical function $(p(x) = \alpha(2x^2 - x) + (1 + \frac{\alpha}{8}))$

α	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
-1	27,31	56	98,51	149,2
-0,5	31,69	60,5	125,39	182,9
-0,1	37,8	70,1	148,1	214,2
0	39,15	72,2	152,79	220,6
0,1	40,5	74,1	157,1	226,7
1	49,2	88	189,81	271,35
2	57	100	218	309,8

4.4 lentelė. Neigiamos tikrinės reikšmės, kai $p(x)$ – nesimetrinė funkcija $(p(x) = \alpha(2x^2 - x) + (1 + \frac{\alpha}{8}))$
Table 4.4. Negative eigenvalues, when $p(x)$ – nonsymmetrical function $(p(x) = \alpha(2x^2 - x) + (1 + \frac{\alpha}{8}))$

α	λ
-1	-9,5
-0,5	-11
-0,1	-14,1
0	-14,8
0,1	-15,49
1	-20,9
2	-26,1

priklauso nuo parametro λ, todėl jį žymėsime $u_i(\lambda)$:

$$u_i(\lambda) = c_1 u_i^1(\lambda) + c_2 u_i^2(\lambda), \quad \lambda = 0, 1, 2, ..., N. \tag{4.19}$$

Kad surastume $u_i^1(\lambda)$ ir $u_i^2(\lambda)$ reikšmes, reikia su konkrečia λ reikšme perkelties metodu spręsti sekančias dvi skirtuminių lygčių sistemas:

$$\begin{cases} a_i u_{i-1}^1(\lambda) - (b_i + \lambda h^2) u_i^1(\lambda) + c_i u_{i+1}^1(\lambda) = 0, i = 1, 2, ..., N-1, \\ u_0^1(\lambda) = 1, u_N^1(\lambda) = 0; \end{cases} \tag{4.20}$$

ir

$$\begin{cases} a_i u_{i-1}^2(\lambda) - (b_i + \lambda h^2) u_i^2(\lambda) + c_i u_{i+1}^2(\lambda) = 0, i = 1, 2, ..., N-1, \\ u_0^2(\lambda) = 0, u_N^2(\lambda) = 1. \end{cases} \tag{4.21}$$

Tarkime, kad jau surasti $u_i^1(\lambda)$ ir $u_i^2(\lambda)$, $i = \overline{0, N}$ sprendiniai, kai $\lambda \in [0, l]$. Įrašę šiuos sprendinius į (4.19) išraišką, o po to įrašę (4.19) išraišką į (4.13), (4.14) nelokaliąsias sąlygas, panašiai kaip ir $\lambda = 0$ atveju gauname išvadą:

4.2 išvada. (4.12)–(4.14) skirtuminio uždavinio neigiama tikrinė reikšmė, $\lambda < 0$, jei ji egzistuoja, yra šios lygties

$$-\gamma_1 l(u_i^1(\lambda)) - \gamma_2 l(u_i^2(\lambda)) + 1 = 0 \tag{4.22}$$

sprendinys.

Aprašysime algoritmą neigiamai tikrinei reikšmei rasti kompiuterinio modeliavimo metodu. Kadangi bendru atveju diferencialinės lygties du tiesiškai nepriklausomus sprendinius $u_i^1(\lambda)$, $u_i^2(\lambda)$ galima surasti tik kiekvienai konkrečiai skaitinei λ reikšmei, tai (4.22) lygties analizinės išraiškos neturime. Pažymėkime (4.22) lygties kairiąją pusę

$$\Phi(\lambda) = \gamma_1 l(u_i^1(\lambda)) - \gamma_2 l(u_i^2(\lambda)) + 1. \tag{4.23}$$

Nurodysime, kaip apskaičiuoti $\Phi(\lambda_k)$ imant konkrečią λ_k reikšmę. Pasirinkę $\lambda = \lambda_k$, išsprendžiame (4.20), (4.21) sistemas ir surandame $\Phi(\lambda_k)$ iš (4.23) formulės. Taip, neturėdami $\Phi(\lambda)$ išraiškos, galime spręsti lygtį $\Phi(\lambda) = 0$ iteraciniu metodu (pvz., bisekcijos ar Niutono metodu), kiekviename iteracijos žingsnyje skaičiuodami $\Phi(\lambda_k)$. Pastebėkime, kad lygiai taip pat galima ieškoti ir teigiamų tikrinių reikšmių $\lambda_k > 0$.

Tokiu būdu buvo atliktas skaitinis eksperimentas tikrinėms reikšmėms rasti, t. y. buvo skaičiuota su daugeliu simetrinių, monotoniškai didėjančių ir monotoniškai mažėjančių funkcijų $p(x)$. Siekta patikrinti, ar negalima parinkti $p(x)$ taip, kad gautume prieštaravimą gerai žinomai klasikinei teoremai apie tikrines reikšmes (4.1) lygčiai, kai $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$: jei funkcijos tenkina nelygybę $p_1(x) \geq p_2(x)$, tai tikrinės reikšmės $(\lambda_i)_1 \geq (\lambda_i)_2$. Čia pateikiame tik keletą pavyzdžių su simetrine ir nesimetrine funkcijomis (4.5, 4.6 paveikslai). Taip pat konkretiems pavyzdžiams išrašyti skaičiavimo rezultatai (4.1–4.4 lentelės). Pateikiamos teigiamos ir neigiamos tikrinės reikšmės ir analizuojame ar jos tenkina aukščiau aptartą teiginį. Visada gavome, kad didėjant funkcijos reikšmei, didėja ir teigiamos tikrinės reikšmės (4.1, 4.3 lentelės). Neigiama tikrinė reikšmė auga absoliutiniu didumu, kai didėja $p(x)$ funkcija (4.2, 4.4 lentelės). Ta pati situacija kartojasi, kai mes turime simetrinę ar nesimetrinę $p(x)$ funkciją. Prieštaravimų teoremai, nebuvo rasta.

4.5. Ketvirtojo skyriaus išvados

- Išnagrinėta diferencialinė lygtis su kintamais koeficientais. Įrodyta, kad nulinės tikrinės reikšmės egzistavimo sąlygos priklauso nuo funkcijos $p(x)$ pobūdžio (simetrinė, monotoniškai mažėjanti ar monotoniškai didėjanti funkcija).
- Esant bet kuriai funkcijai $p(x) \geq 0$, tikrines reikšmes galima rasti skaitiniu metodu, kurio efektyvumas iliustruojamas skaitinio eksperimento rezultatais.

5

Dvimatė elipsinio tipo diferencialinė lygtis su integralinėmis sąlygomis

5.1. Dvimatė elipsinio tipo diferencialinė lygtis su integralinėmis sąlygomis

Rezultatus, gautus nagrinėjant paprastojo diferencialinio operatoriaus tikrines reikšmes, galima apibendrinti ir dvimačiam elipsiniam operatoriui su integralinėmis sąlygomis.

Pirmą kartą kraštinis uždavinys elipsinei lygčiai su nelokaliosiomis sąlygomis buvo suformuluotas 1969 m. A. V. Bitsadzės, A. A. Samarskio straipsnyje (1969). Šiame straipsnyje buvo nagrinėtas uždavinys dvimatei elipsinei lygčiai su nelokaliosiomis sąlygomos

$$u(x)|_{x\in\Gamma_1} = u(s)|_{s\in L}, \quad x = \varphi(s), \tag{5.1}$$

kuriose Γ_1 – srities kontūro dalis, L – vidinė srities kreivė, $x = \varphi(s)$ – funkcija, nusakanti abipus vienareikšmę kreivių Γ_1 ir L taškų atitinkamybę. (5.1) nelokaliosios sąlygos dabar vadinamos Bitsadzės ir Samarskio nelokaliosiomis sąlygomis.

V. A Iljino ir E. J. Moisejevo 1990 m. straipsnyje (1990) išnagrinėtas baigtinių skirtumų metodas dvimatei elipsinio tipo lygčiai su pastoviais koeficientais stačiakampėje srityje su daugiataške nelokaliąja sąlyga pagal vieną kintamąjį.

Tikrinių reikšmių uždavinys dvimačiam elipsiniam operatoriui su Bitsadzės ir Samarskio sąlyga pagal vieną kintamąjį pradėtas nagrinėti (Sapagovas 2002b; Sapagovas and Štikonas 2005). Tikrinės reikšmės dvimačiu atveju su nelokaliąja Samarskio ir Ionkino sąlyga nagrinėtos (Gulin *et al.* 2006a; Ionkin and Morozova 2000) straipsniuose. Šiuose straipsniuose tikrinės reikšmės buvo nagrinėjamos su tikslu ištirti skirtuminių schemų stabilumą dvimatėms parabolinėms lygtims.

Tikrinių reikšmių uždavinys dvimačiam operatoriui su integralinėmis sąlygomis literatūroje nagrinėtas gana mažai. 2008 m. M. Sapagovo (2008) ir 2009 m. M. Sapagovo, O. Štikonienės (2009) straipsniuose nagrinėjant padidinto tikslumo skirtumines schemas Puasono lygčiai spręsti buvo nagrinėtas ir atitinkamas tikrinių reikšmių uždavinys.

Šiame disertacijos skyriuje nagrinėjamas tikrinių reikšmių uždavinys dvimačiam elipsiniam operatoriui su integralinėmis sąlygomis. Dvimatis uždavinys suvedamas į du vienamačius tikrinių reikšmių uždavinius, ir jie nagrinėjami atskirai. Analizuojama tikrinių reikšmių priklausomybė nuo nelokaliųjų sąlygų parametrų. Suformuluojamos ir pateikiamos gautos tikrinių reikšmių savybės.

5.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime tikrinių reikšmių uždavinį elipsiniam operatoriui

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, \tag{5.2}$$

stačiakampėje srityje $(x, y) \in \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ su kraštinėmis

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0, \tag{5.3}$$

ir nelokaliosiomis sąlygomis

$$u(0,y) = \gamma_1 \int_0^1 u(x,y)\mathrm{d}x, \tag{5.4}$$

$$u(1,y) = \gamma_2 \int_0^1 u(x,y)\mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

Ieškosime elipsinės lygties (5.2) netrivialaus sprendinio $(u(x) \neq 0)$. Tuo tikslu naudosime kintamųjų atskyrimo metodą (Furjė metodą). Taigi naudojant šį metodą ieškosime sprendinio $u(x, y)$ tokiu pavidalu:

$$u(x, y) = v(x)w(y). \tag{5.6}$$

Įrašę šį (5.6) sprendinį į (5.2) elipsinio tipo lygtį, gauname

$$w(y)\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2} + v(x)\frac{\mathrm{d}^2 w(y)}{\mathrm{d}y^2} + \lambda v(x)w(y) = 0$$

arba trumpiau galime užrašyti

$$\frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{w''(y)}{w(y)} + \lambda = 0,$$

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} - \lambda. \tag{5.7}$$

Kairioji lygybės pusė priklauso tik nuo kintamojo x, dešinioji tik nuo kintamojo y. Todėl ištikrųjų abi šios išraiškos nepriklauso nei nuo x, nei nuo y. Įveskime pažymėjimą

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\eta, \quad \frac{w''(y)}{w(y)} = -\mu, \tag{5.8}$$

čia η ir μ – nežinomos konstantos. Šias išraiškas (5.8) palyginę su (5.7), gauname lygybę

$$\eta + \mu = \lambda. \tag{5.9}$$

Toliau, įrašę (5.6) sprendinio išraišką į (5.4) kraštines sąlygas, gauname

$$v(x)w(0) = 0,$$
$$v(x)w(1) = 0$$

visoms x reikšmėms. Taigi turime, kad

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 0, \tag{5.10}$$

nes priešingu atveju būtų $v(x) = 0$ visoms x reikšmėms, t. y. $u(x, y) \equiv 0$, ko būti negali. Gautume prieštaravimą.

Dabar įrašysime (5.6) sprendinio išraišką į (5.4) integralinę sąlygą. Įstatę gauname, kad

$$v(0)w(y) = \gamma_1 w(y) \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x. \tag{5.11}$$

Ši lygybė turi būti teisinga visoms $w(y)$ reikšmėms. Kadangi $w(y) \not\equiv 0$, tai (5.11) lygybė bus teisinga tada ir tik tada, kai

$$v(0) = \gamma_1 \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x.$$

Lygiai tokiu pat būdu iš (5.5) integralinės sąlygos gauname sekančią sąlygą

$$v(1) = \gamma_2 \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x.$$

Taigi gauname du vienamačius tikrinių reikšmių uždavinius

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + \eta v = 0, \tag{5.12}$$

$$v(0) = \gamma_1 \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x, \tag{5.13}$$

$$v(1) = \gamma_2 \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x \tag{5.14}$$

ir

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2} + \mu w = 0, \tag{5.15}$$

$$w(0) = 0, \tag{5.16}$$

$$w(1) = 0. \tag{5.17}$$

Antrasis iš šių uždavinių (5.15)–(5.17) yra tikrinių reikšmių uždavinys su klasikinėmis sąlygomis, ir jo sprendiniai yra žinomi (Paulauskas 1974):

$$\mu_l = (\pi l)^2, \quad w_l(y) = \sin \pi l y, \quad l = 1, 2, 3... \tag{5.18}$$

(5.12)–(5.14) tikrinių reikšmių uždavinys išnagrinėtas disertacijos 1 skyriuje. Pažymėję (5.12)–(5.14) uždavinio tikrines reikšmes η_k, gauname (5.2)–(5.5) dvimačio uždavinio tikrinę reikšmę λ_{kl}:

$$\lambda_{kl} = \eta_k + \mu_l, \quad k = -1, 0, 1, 2, ..., \quad l = 1, 2, 3... \tag{5.19}$$

Sekančiame poskyryje nagrinėsime dvimačio elipsinio uždavinio su integralinėmis sąlygomis tikrinių reikšmių savybes, jų priklausomybę nuo uždavinio parametrų.

5.3. Tikrinių reikšmių savybės

Šiame poskyryje pasinaudosime 1 skyriuje gautais rezultatais apie paprastojo diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis sąlygomis tikrinių reikšmių savybes.

Jei (5.2)–(5.5) uždavinio visos tikrinės reikšmės yra teigiamos, tai aišku, kad ir λ_{kl} yra teigiamos. Šios sąlygos apibrėžtos 1 skyriaus 3.3 poskyryje.

Išsiaiškinsime, kada mūsų nagrinėjamam tikrinių reikšmių uždaviniui egzistuoja nulinė tikrinė reikšmė.

5.1 teorema. Jei

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi l}{\mathrm{th}\frac{\pi l}{2}}, \quad l = 1, 2, 3, ..., \tag{5.20}$$

tai (5.2)–(5.5) uždavinys turi paprastąją (nekartotinę) tikrinę reikšmę $\lambda = 0$.

Įrodymas. Iš (5.18) ir (5.19) seka, kad $\lambda_{kl} = 0$, jei

$$\eta_k = -\mu_l = -(\pi l)^2, \quad l = 1, 2, 3...$$

Iš 1 disertacijos skyriaus formulės (1.21) seka, kad $\eta_l = -(\pi l)^2$, jei skaičius $\beta = \pi l$, $l = 1, 2, 3...$ yra lygties

$$\mathrm{th}\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{\gamma_1 + \gamma_2} \tag{5.21}$$

teigiamoji šaknis. Iš čia gauname

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi l}{\mathrm{th}\frac{\pi l}{2}}, \quad l = 1, 2, 3...$$

Teorema įrodyta.

5.2 teorema. Jei parametrai γ_1, γ_2 tenkina nelygybes

$$\frac{(s-1)\pi}{\text{th}\frac{(s-1)\pi}{2}} < \gamma_1 + \gamma_2 < \frac{s\pi}{\text{th}\frac{s\pi}{2}}, \quad s = 1, 2, 3, ..., \tag{5.22}$$

tai (5.2)–(5.5) dvimatis uždavinys turi $s-1$ neigiamų tikrinių reikšmių. Likusios tikrinės reikšmės yra teigiamos ir jų yra be galo daug.

Įrodymas. Kai

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{s\pi}{\text{th}\frac{s\pi}{2}}, \quad s = 1, 2, 3, ...,$$

tai $\beta = s\pi$, $s = 1, 2, 3...$ yra lygties (5.21) šaknis, t. y. $\eta_{-1} = -(s\pi)^2$ yra (5.12)–(5.14) uždavinio tikrinė reikšmė. Tada mūsų nagrinėjamas dvimatis uždavinys turi $(s-1)$ neigiamą tikrinę reikšmę ir vieną nulinę ($\lambda = 0$) tikrinę reikšmę.

Pasinaudosime savybe, kad funkcija

$$f(\beta) = \frac{\beta}{\text{th}\frac{\beta}{2}}$$

yra monotoniškai didėjanti (1 Skyriaus 1.1 paveikslas). Tada, kai galioja ši savybė ir kai parametro reikšmė $\gamma_1 + \gamma_2$ tenkina (5.22) nelygybę, (5.2)–(5.5) dvimatis uždavinys turi $s-1$ neigiamųjų tikrinių reikšmių. Visos likusios realios tikrinės reikšmės yra teigiamos, o jų yra be galo daug.

Teorema įrodyta.

Galime apibendrinti ir užrašyti sekančias išvadas apie dvimačio elipsinio tipo diferencialinio operatoriaus su integralinėmis sąlygomis spektrą.

5.1 išvada. Jei

$$\gamma_1 + \gamma_2 < \frac{\pi}{\text{th}\frac{\pi}{2}},$$

tai visos tikrinės reikšmės teigiamos.

5.2 išvada. Jei

$$\frac{\pi}{\text{th}\frac{\pi}{2}} < \gamma_1 + \gamma_2 < \frac{2\pi}{\text{th}\frac{2\pi}{2}},$$

tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, kitos tikrinės reikšmės yra teigiamos.

Pastaba. Ištyrus tikrinių reikšmių uždavinį dvimačiam elipsinio tipo diferencialiniam operatoriui su integralinėmis sąlygomis, gautus rezultatus galima pritaikyti skirtuminių lygčių sistemų sprendimui iteraciniais metodais.

Nagrinėkime dvimatę diferencialinę lygtį

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

su (5.3)–(5.5) nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Visas stačiakampės srities $(x, y) \in \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ kraštines padaliname į N lygių dalių. Tada (5.2)–(5.5) diferencialinį uždavinį suvedame į skirtuminių lygčių sistemą

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}, \tag{5.23}$$

$$U_{i,0} = 0, \quad U_{i,N} = 0, \tag{5.24}$$

$$U_{0,j} = \gamma_1 h \left(\frac{U_0^{j+1} + U_N^{j+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} U_i^j \right), \tag{5.25}$$

$$U_{N,j} = \gamma_2 h \left(\frac{U_0^{j+1} + U_N^{j+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} U_i^j \right), \tag{5.26}$$

čia $h = 1/N$, $i = \overline{1, N-1}$ ir $j = \overline{1, N-1}$.

Sukonstruojame iteracinį metodą

$$u^{k+1} = u^k - \alpha(\Lambda u^k - f). \tag{5.27}$$

Remiantis gerai žinoma teorema Sapagovas (2002b), galime daryti išvadą. Jei $\lambda(\Lambda) > 0$, tai (5.27) iteracinis metodas konverguoja, kai

$$0 < \alpha < \frac{2}{max \lambda_i(\Lambda)}.$$

5.4. Penktojo skyriaus išvados

- Įrodyta, kad 1 skyriaus rezultatus galima apibendrinti tikrinių reikšmių uždaviniui dvimačiam elipsiniam operatoriui su integralinėmis sąlygomis, suvedant šį uždavinį į du vienamačius tikrinių reikšmių uždavinius.
- Išanalizavus (5.2)–(5.5) dvimatį uždavinį gauta, kad jei $\gamma_1 + \gamma_2 < \dfrac{\pi}{\mathrm{th}\frac{\pi}{2}}$,

tai visos tikrinės reikšmės teigiamos; jei $\frac{\pi}{\operatorname{th}\frac{\pi}{2}} < \gamma_1 + \gamma_2 < \frac{2\pi}{\operatorname{th}\frac{2\pi}{2}}$, tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, o kitos tikrinės reikšmės yra teigiamos. Gauta, kad šio uždavinio tikrinių reikšmių išsibarstymas priklauso tik nuo parametro $\gamma_1 + \gamma_2$ reikšmės.

6

Parabolinės lygties su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis skirtuminės schemos stabilumo analizė

6.1. Parabolinės lygties su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis skirtuminės schemos stabilumo analizė

Šiame skyriuje nagrinėjamas baigtinių skirtuminių schemų stabilumas parabolinėms lygtims su integralinėmis sąlygomis. Analizuojamas nelokalusis parabolinis uždavinys sutinkamas aprašant šilumos laidumo ar šilumos tamprumo procesus. Vienas pirmųjų tokių uždavinių yra sutinkamas kvazistatinėje tamprumo teorijoje nagrinėjant homogeninę izotropinę juostą $0 \leqslant x \leqslant 1$, kuri juda taip, kad slinkties vektorius yra lygiagretus Dekarto koordinačių sistemos abscisių ašiai (Day 1982, 1992). Šis uždavinys yra plačiai cituojamas mokslinėje literatūroje (Fairweather and Lopez-Marcos 1996; Merazga and Bouziani 2005). Šiame disertacijos skyriuje stabilumo analizė yra paremta skirtuminės lygčių sistemos perėjimo matricos spektro analize. Apibrėžtos naujos bendresnės stabilumo sąlygos lyginant su kitų autorių darbais.

Nagrinėjamas skirtuminių schemų stabilumas parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad a < x < b,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6.1}$$

$$u(a,t) = \int_a^b \alpha(x) u(x,t) dx + \mu_1(t), \tag{6.2}$$

$$u(b,t) = \int_a^b \beta(x) u(x,t) dx + \mu_2(t), \tag{6.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{6.4}$$

Parabolinės lygtys su nelokaliosiomis sąlygomis pradėtos tyrinėti 1963 m. J. R. Cannon ir 1964 m. L. Kamynino straipsniuose, kuriuose nagrinėjama šilumos sklidimo lygtis. Uždavinio formulavime viena kraštinė sąlyga keičiama į nelokaliąją integralinę sąlygą

$$\int_a^b g(x,t) u(x,t) dx = E(t), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

čia a ir b bendru atveju yra kintamojo t funkcijos.

1977 m. N. I. Ionkin straipsnyje nagrinėjama parabolinė lygtis su kitokio tipo nelokaliąja sąlyga, kuri susieja nežinomos funkcijos kraštinius taškus

$$u'(a) = u'(b).$$

Pirmą kartą (6.2), (6.3) nelokaliosios sąlygos buvo apibrėžtos W. A. Day straipsnyje 1982 m. Čia buvo nagrinėjami tiesiniai šiluminio tamprumo uždaviniai. Šiame straipsnyje autorius įrodo, kad entropija $\eta(x,t)$ tūrio vienete yra parabolinės lygties

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad -l < x < l \tag{6.5}$$

su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$\eta(-l,t) = -w \int_{-l}^{l} (l - 3x) \eta(x,t) dx, \tag{6.6}$$

$$\eta(l,t) = -w \int_{-l}^{l} (l + 3x)\eta(x,t)dx \tag{6.7}$$

ir pradine sąlyga

$$\eta(x,0) = \eta_0(x)$$

sprendinys. Čia a ir w yra fizikines ir geometrines savybes aprašančios konstantos.

Baigtinių skirtumų schemų su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis stabilumas buvo nagrinėtas daugelio autorių straipsniuose. 1991 m. G. Ekolin staipsnyje pateikta skirtuminių schemų parabolinėms lytims stabilumo analizė, kai nelokaliosios integralinės sąlygos yra (6.2), (6.3) tipo. Stabilumo sąlygos šiuo atveju buvo apibrėžtos sekančiai:

$$\int_a^b |\alpha(x)|dx < 1, \qquad \int_a^b |\beta(x)|dx < 1. \tag{6.8}$$

Panašios pakankamos stabilumo sąlygos (6.8) buvo apibrėžtos Y. Liu straipsnyje (1999). Čia stabilumo sąlygos gautos tokios:

$$\int_a^b |\alpha(x)|^2dx + \int_a^b |\beta(x)|^2dx < 2. \tag{6.9}$$

1996 m. G. Fairweather ir J. C. Lopez-Marcos straipsnyje įrodyta stabilumo sąlygos skirtuminei schemai netiesinėms parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis (6.2), (6.3)

$$\int_a^b |\alpha(x)|^2dx < 1, \qquad \int_a^b |\beta(x)|^2dx < 1. \tag{6.10}$$

Skirtuminių schemų stabilumas parabolinėms lygtims su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis nagrinėjamas straipsniuopse (Cahlon *et al.* 1995; Čiegis *et al.* 2002; Gulin *et al.* 2001, 2006a).

Šiame skyriuje nagrinėjamas baigtinių skirtuminių schemų stabilumas parabolinėms lygtims su (6.2), (6.3) nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, kuriose $\alpha(x), \beta(x)$ reikšmės yra iš vienetinio ilgio termotampraus strypo kvazistatinio lenkimo modelio (Day 1983). Stabilumo sąlygos suformuluotos remiantis skirtuminio operatoriaus spektro savybėmis. Tokiu būdu gautos stabilumo sąlygos yra skirtingos nuo tų, kurios nagrinėjamas G. Ekolin (1991), G. Fairweather and J. C. Lopez-Marcos (1996), Y. Liu (1999) straipsniuose. Toks skirtuminių schemų stabilumo tyrinėjimas buvo naudotas M. Sapagovo (2005, 2008) straipsniuose: pirmame (Sapagovas 2005), kai imamas atvejis $\alpha(x) = const$, $\beta(x) = const$, antrame (Sapagovas 2008) – kai kurioms konkrečioms $\alpha(x)$, $\beta(x)$ reikšmėms. Šiame skyriuje nagrinėjamas baigtinių skirtumų schemos stabilumas tiriant nesimetrinio skirtuminio operatoriaus spektrą.

6.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėjama parabolinė lygtis su (6.2), (6.3) nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Perrašykime šį uždavinį kitu pavidalu (Day 1982)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad -l < x < l, \ 0 \le t \le T \tag{6.11}$$

$$u(-l,t) = \frac{\gamma_1}{l^2} \int\limits_{-l}^{l} \alpha(x) u(x,t) dx + \mu_1(t), \tag{6.12}$$

$$u(l,t) = \frac{\gamma_2}{l^2} \int\limits_{-l}^{l} \beta(x) u(x,t) dx + \mu_2(t), \tag{6.13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{6.14}$$

čia

$$\alpha(x) = l - 3x, \qquad \beta(x) = l + 3x, \tag{6.15}$$

γ_1, γ_2 duoti parametrai. Uždavinio formulavimas, tiksliau, konkrečios (6.12), (6.13) sąlygų išraiškos, paimtos iš (Day 1982) straipsnio.

Šiam uždaviniui užrašoma skirtuminių lygčių sistema:

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j}{\tau}=\frac{U_{i-1}^{j+1}-2U_i^{j+1}+U_{i+1}^{j+1}}{h^2}+f_i^{j+1},\quad i=\overline{-N+1,N-1} \tag{6.16}$$

$$U_{-N}^{j+1}=l_1(U), \tag{6.17}$$

$$U_N^{j+1}=l_2(U); \tag{6.18}$$

$$U_i^0=\varphi_i,\qquad i=\overline{-N,N}; \tag{6.19}$$

čia $h=l/N,\ \tau=T/M,$

$$l_1(U)=\frac{\gamma_1 h}{l^2}\Big(\frac{\alpha_{-N}U_{-N}^{j+1}+\alpha_N U_N^{j+1}}{2}+\sum_{i=-N+1}^{N-1}\alpha_i U_i^{j+1}\Big)+\mu_1^{j+1}, \tag{6.20}$$

$$l_2(U)=\frac{\gamma_2 h}{l^2}\Big(\frac{\beta_{-N}U_{-N}^{j+1}+\beta_N U_N^{j+1}}{2}+\sum_{i=-N+1}^{N-1}\beta_i U_i^{j+1}\Big)+\mu_2^{j+1}. \tag{6.21}$$

6.3. Skirtuminės schemos stabilumas

Pirmiausiai, norėdami nagrinėti (6.16)–(6.19) skirtuminį uždavinį, jį perrašome standartiniu pavidalu

$$U^{j+1}=SU^j+\bar{f}^j, \tag{6.22}$$

čia $U^j=(U_{-N+1}^j,U_{-N+2}^j,\ldots,U_{N-1}^j)'$ yra skirtuminio uždavinio sprendinys vektorine forma (j)-ajame sluoksnyje.

Norėdami gauti (6.22) išraišką, (6.17), (6.18) sąlygas užrašome kaip dviejų lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais U_{-N}^{j+1}, U_N^{j+1}:

$$\begin{cases}\big(1-\frac{\gamma_1 h\alpha_{-N}}{2l^2}\big)U_{-N}^{j+1}-\frac{\gamma_1 h\alpha_N}{2l^2}U_N^{j+1}=\frac{\gamma_1 h}{l^2}\sum\limits_{i=-N+1}^{N-1}\alpha_i U_i^{j+1}+\mu_1^{j+1},\\ -\frac{\gamma_2 h\beta_{-N}}{2l^2}U_{-N}^{j+1}+\big(1-\frac{\gamma_2 h\beta_N}{2}\big)U_N^{j+1}=\frac{\gamma_2 h}{l^2}\sum\limits_{i=-N+1}^{N-1}\beta_i U_i^{j+1}+\mu_2^{j+1}.\end{cases} \tag{6.23}$$

Iš šios sistemos nežinomuosius U_{-N}^{j+1},U_N^{j+1} išreiškiame per nežinomuosius

$U_i^{j+1}, i = \overline{-N+1, N-1}$

$$U_{-N}^{j+1} = \sum_{i=-N+1}^{N-1} \bar{\alpha}_i U_i^{j+1} + \bar{\mu}_1^{j+1}, \tag{6.24}$$

$$U_N^{j+1} = \sum_{i=-N+1}^{N-1} \bar{\beta}_i U_i^{j+1} + \bar{\mu}_2^{j+1}. \tag{6.25}$$

Koeficientų $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\mu}_1^{j+1}, \bar{\mu}_2^{j+1}$ išraiškų neduodame, nes vėliau jie nėra naudojami.

(6.24), (6.25) lygybės teisingos, jei (6.23) sistemos determinantas nelygus nuliui

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\gamma_1 h \alpha_{-N}}{2l^2} & -\dfrac{\gamma_1 h \alpha_N}{2l^2} \\ -\dfrac{\gamma_2 h \beta_{-N}}{2l^2} & 1 - \dfrac{\gamma_2 h \beta_N}{2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Iš to seka, kad

$$1 - \frac{2h(\gamma_1 + \gamma_2)}{l} + \frac{3h^2 \gamma_1 \gamma_2}{l^2} \neq 0. \tag{6.26}$$

Kairioji (6.26) nelygybės pusė, kvadratinis trinaris pagal h, yra lygi nuliui prie dviejų h_1, h_2 reikšmių. Kitoms h reikšmėms galioja nelygybė (6.26). Šilumos laidumo uždavinyje (Day 1983) $\gamma_1 = \gamma_2 < 0$. Kai $\gamma_1 = \gamma_2 < 0$, (6.26) nelygybė nepriklauso nuo tinklelio žingsnio h, tuo būdu ji galioja bet kokiam $h > 0$. Tuo atveju, kai $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 > 0$, kvadratinio trinario šaknys yra $h_1 = 1/3\gamma l$, $h_2 = 1/\gamma l$, taigi (6.26) nelygybė yra teisinga bet kokiai pakankamai mažai h: $0 < h < 1/3\gamma l$ reikšmei. Bendru atveju, jei $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Galima teigti, kad (6.26) nelygybė yra teisinga, kai h yra pakankamai mažas.

(6.24) išraišką U_{-N}^{j+1} įrašome į (6.16) lytį, kai $i = -N+1$ ir (6.25) išraišką U_N^{j+1} į (6.16) lygtį, kai $i = N-1$. (6.11)–(6.13) skirtuminis uždavinys $(j+1)$-jame sluoksnyje yra pavidalo

$$U^{j+1} = U^j + \tau(-AU^{j+1} + f^{j+1}); \tag{6.27}$$

čia matrica A yra $(2N-1)$-osios eilės

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2-\bar{\alpha}_{-N+1} & -1-\bar{\alpha}_{-N+2} & \dots & \dots & -\bar{\alpha}_{N-1} \\ -1 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 2 & -1 \\ -\bar{\beta}_{N+1} & -\bar{\beta}_{N+2} & \dots & -1-\bar{\beta}_{N-2} & 2-\bar{\beta}_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{6.28}$$

Vektorius f^{j+1} yra apibrėžtas su reikšmėmis f_i^{j+1} ir $\bar{\mu}_l^{j+1}$, $l = 1, 2$. Taigi dabar yra galimybė (6.27) skirtuminę schemą suvesti į (6.22) pavidalą, kuriame

$$\begin{aligned} S &= (E+\tau A)^{-1}, \qquad (6.29)\\ \bar{f}^j &= \tau(E+\tau A)^{-1} f^{j+1}. \end{aligned}$$

Pakankamoji (6.22) skirtuminio uždavinio stabilumo sąlyga gali būti užrašyta pavidalu (Samarskii 2001)

$$\|S\| \le 1 + C_0\tau, \tag{6.30}$$

čia konstanta C_0 nepriklauso nuo τ ir h reikšmių. Jei S yra simetrinė matrica, tada galima naudoti kitokią būtinąją ir pakankamąją stabilumo sąlygą vietoje (6.30)

$$\rho(S) < 1, \tag{6.31}$$

čia $\rho(S)$ yra matricos S spektrinis spindulys. Tačiau tuo atveju, kai nagrinėjame uždavinius su nelokaliosiomis sąlygomis, matrica S visada yra nesimetrinė. $\rho(S) < 1$ yra būtina ir pakankama sąlyga tam, kad galima būtų apibrėžti matricos normą $\|S\|_*$, pasižyminčia savybe $\|S\|_* < 1$ (Sapagovas 2008).

Pastebime, kad jei S yra paprastos struktūros matrica, tada norma $\|S\|_*$ gali būti apibrėžta sekančiai (Collatz 1964; Sapagovas 2002b)

$$\|S\|_* = \rho(S).$$

Tada vektoriaus norma suderinama su matricos norma yra apibrėžiama

$$\|U\|_* = \|P^{-1}U\|_3, \tag{6.32}$$

čia P yra matrica, kurios stulpeliai yra tiesiškai nepriklausomi matricos S tikriniai vektoriai ir $\|U\|_3 = (u, u)^{1/2}$.

Todėl naudojame pakankamąją skirtuminio uždavinio (6.31) stabilumo sąlygą taip pat ir nesimetrinei matricai S. Išsamesnė stabilumo analizė nagrinėjamam uždaviniui pateikta straipsniuose (Cahlon *et al.* 1995; Gulin and Morozova 2009; Sapagovas 2008).

Tuo atveju, kai matrica $S = (E + \tau A)^{-1}$, pakankamoji stabilumo sąlyga $\rho(S) < 1$ skirtuminiam uždaviniui gali būti užrašyta taip (Sapagovas 2008):

$$\operatorname{Re}\lambda_i(A) > 0, \quad i = \overline{-N+1, N-1}. \tag{6.33}$$

6.4. Matricos A spektro struktūra

Šis skyrius yra skirtas matricos A spektro analizei.

Nagrinėkime tokį diferencialinį tikrinių reikšmių uždavinį

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \qquad -l < x < l,$$

$$u(-l) = \frac{\gamma_1}{l^2}\int_{-l}^{l} \alpha(x)u(x)dx,$$

$$u(l) = \frac{\gamma_2}{l^2}\int_{-l}^{l} \beta(x)u(x)dx,$$

kuriame $\alpha(x)$, $\beta(x)$ apibrėžti (6.15) formulėmis.

Šiam diferencialiniam uždaviniui sukonstruojame skirtuminių lygčių sistemą

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + \lambda U_i = 0, \quad i = \overline{-N+1, N-1} \tag{6.34}$$

$$U_{-N} = l_1(U), \tag{6.35}$$

$$U_N = l_2(U); \tag{6.36}$$

čia $l_1(U), l_2(U)$ randame iš (6.20), (6.21) lygčių, kai $\mu_1^{j+1} = \mu_2^{j+1} = 0$.

Analizuosime tris atskirus atvejus,t. y. tirsime, kada egzistuoja nulinė, neigiamos ir teigiamos tikrinės reikšmės.

1 atvejis: $\lambda = 0$. Nagrinėkime, kada $\lambda = 0$ yra (6.34)–(6.36) uždavinio tikrinė reikšmė. Kitaip sakant, rasime ar egzistuoja netrivialus (6.34)–(6.36) uždavinio sprendinys U_i, kai $\lambda = 0$.

6.1 teorema. $\lambda = 0$ yra matricos A tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai teisinga lygybė

$$(4+2h^2)\gamma_1\gamma_2 - \Big(l+1+\frac{h^2}{2}\Big)(\gamma_1+\gamma_2)+l^2=0. \tag{6.37}$$

Įrodymas. Kai $\lambda=0$, tai bendrasis (6.34) lygties sprendinys yra

$$U_i = c_1 ih + c_2. \tag{6.38}$$

Įstatę šį bendrąjį sprendinį į abi (6.35), (6.36) nelokaliąsias sąlygas, gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} \Big\{(2l^3+lh^2)\dfrac{\gamma_1}{l^2}-l\Big\}c_1+(1-2\gamma_1)c_2=0, \\ \Big\{l-\dfrac{\gamma_2}{l^2}(2l^3+lh^2)\Big\}c_1+(1-2\gamma_2)c_2=0. \end{cases} \tag{6.39}$$

(6.38) sprendinys yra netrivialus tada ir tik tada, jei (6.39) sistemos determinantas lygus nuliui. Iš to tiesiogiai gauname (6.37) lygtį. Teorema įrodyta.

Ši (6.37) lygtis koordinačių sitemoje (γ_1,γ_2) aprašo hiperbolę (6.1 paveikslas).

Šios hiperbolės asimptotės gaunamos iš sekančių lygybių

$$\gamma_1=a,\quad \gamma_2=a,\quad a=\frac{1}{2}+O(h^2)=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4(2l^2+h^2)},$$

su centru (a,a). Kai $h\to 0$, tai hiperbolės šakos artėja prie asimptočių.

Pastaba. Nelokaliąsias sąlygas aproksimuosime Simpsono formule, t. y. gausime išraiškas

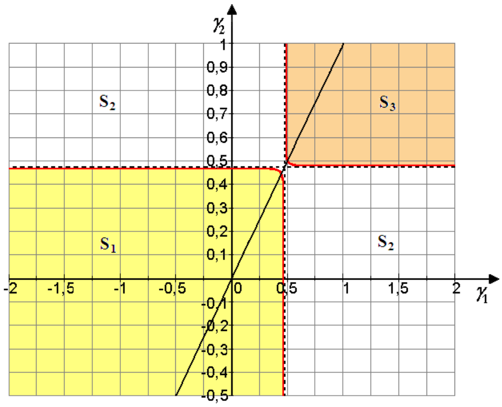
$$\begin{aligned} l_1(U)=\frac{\gamma_1 h}{3l^2}\Big(&\alpha_{-N}U_{-N}+\alpha_N U_N+2\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_{-N+2k+1}U_{-N+2k+1} \\ &+4\sum_{k=1}^{N-1}\alpha_{-N+2k}U_{-N+2k}\Big), \end{aligned} \tag{6.40}$$

$$l_2(U) = \frac{\gamma_2 h}{3l^2}\Big(\beta_{-N}U_N + \beta_N U_N + 2\sum_{k=0}^{N-1}\beta_{-N+2k+1}U_{-N+2k+1}$$
$$+ 4\sum_{k=1}^{N-1}\beta_{-N+2k}U_{-N+2k}\Big). \tag{6.41}$$

Tada su šiomis (6.40), (6.41) sąlygomis (6.37) lygtis įgaus pavidalą

$$4l^2\gamma_1\gamma_2 - 2l^2(\gamma_1 + \gamma_2) + l^2 = 0. \tag{6.42}$$

Kai $l = 1$, hiperbolė pereis į dvi statmenai besikertančias tieses taškuose $\gamma_1 = 1/2$, $\gamma_2 = 1/2$.



6.1 pav. Hiperbolė (6.37) ir sritys S_1, S_2, S_3 $(l = 1, N = 10)$
Fig. 6.1. Hyperbola (6.37) and areas S_1, S_2, S_3 $(l = 1, N = 10)$

2 atvejis: $\lambda > 0$. Šiuo atveju nustatysime teigiamas matricos A tikrines reikšmes. (6.34) lygtį perrašysime tokiu pavidalu

$$U_{i-1} - 2(1 - \frac{h^2\lambda}{2})U_i + U_{i+1} = 0. \tag{6.43}$$

Jei $\lambda > 0$, tai $1 - h^2\lambda/2 < 1$. Ieškosime teigiamų tikrinių reikšmių, kai tenkinama nelygybė

$$\Big|1 - \frac{h^2\lambda}{2}\Big| < 1. \tag{6.44}$$

Kitaip sakant, rasime teigiamas tikrines reikšmes iš intervalo $(0, 4/h^2)$.

6.2 teorema. Matricos A teigiamos tikrinės reikšmės intervale $(0, 4/h^2)$ turi pavidalą

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha_k h}{2}, \tag{6.45}$$

čia $\alpha_k \in (0, \frac{\pi N}{l})$ yra teigiamos šaknys gautos iš lygties

$$\frac{24\sin\alpha l}{B\alpha l}\Big(\frac{\sin\alpha l}{A\alpha^2}-\frac{l\cos\alpha l}{B\alpha}\Big)\gamma_1\gamma_2-\Big(\frac{2l\sin^2\alpha l}{B\alpha}+6\cos\alpha l\big(\frac{\sin\alpha l}{A\alpha^2}-\frac{l\cos\alpha l}{B\alpha}\big)\Big)$$
$$(\gamma_1+\gamma_2)+2l^2\cos\alpha l\sin\alpha l=0, \tag{6.46}$$

$$A=\frac{4}{\alpha^2h^2}\sin^2\frac{\alpha h}{2}, \quad B=\frac{2}{\alpha h}\mathrm{tg}\,\frac{\alpha h}{2}. \tag{6.47}$$

Įrodymas. Nagrinėjamu atveju tenkinama (6.44) nelygybė. Įveskime pažymėjimą $1-\dfrac{h^2\lambda}{2}=\cos\alpha h$. Iš to seka, kad

$$\lambda=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha h}{2}.$$

Bendrasis (6.43) lygties sprendinys yra

$$U_i=C_1\cos\alpha ih+C_2\sin\alpha ih. \tag{6.48}$$

Įstatę šią išraišką į (6.35), (6.36) nelokaliąsias sąlygas ir atlikę skaičiavimus, gauname

$$\begin{aligned}C_1\cos\alpha l-C_2\sin\alpha l&=\frac{2\sin\alpha l}{B\alpha l}\gamma_1c_1-6\Big(\frac{\sin\alpha l}{A\alpha^2}-\frac{lcos\alpha l}{B\alpha}\Big)\frac{\gamma_1}{l^2}c_2,\\ C_1\cos\alpha l+C_2\sin\alpha l&=\frac{2\sin\alpha l}{B\alpha l}\gamma_2c_1+6\Big(\frac{\sin\alpha l}{A\alpha^2}-\frac{lcos\alpha l}{B\alpha}\Big)\frac{\gamma_2}{l^2}c_2.\end{aligned} \tag{6.49}$$

Taigi (6.48) sprendinys nėra trivialus tada ir tik tada, kai (6.49) sistemos determinantas yra lygus nuliui. Apskaičiavę determinantą, gauname (6.46) lygybę. Teorema įrodyta.

Bendru atveju (6.46) lygtis gali turėti be galo daug šaknų. Tačiau matrica A turi tik baigtinį tikrinių reikšmių skaičių. Įveskime pažymėjimą, t. y. kairę (6.46) lygties pusę pažymėkime kaip funkciją $\Phi(\alpha,\gamma_1,\gamma_2)$ ir paanalizuokime šios funkcijos savybes.

6.1 lema. Funkcija $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ yra periodinė funkcija, pagal parametrą α, su periodu $2\pi N/l$, t. y.

$$\Phi(\alpha + \frac{2\pi N}{l}, \gamma_1, \gamma_2) = \Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2).$$

Lemos įrodymas seka iš to, kad visos sumos funkcijoje $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ yra periodinės (tai akivaizdžiai matyti iš išraiškų A, B, gaunamų iš (6.47) lygybių). Mažiausias periodas yra gaunamas iš funkcijų $\sin^2 \frac{\alpha h}{2}$, tg $\frac{\alpha h}{2}$.

6.2 lema. Lygybė

$$\Phi\Big(\frac{2\pi N}{l} - \alpha, \gamma_1, \gamma_2\Big) = \Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2) \tag{6.50}$$

yra teisinga.

Įrodymas. (6.50) lygybės teisingumas tiesiogiai seka iš formulių

$$\sin(\frac{2\pi N}{l} - \alpha)l = -\sin \alpha l, \qquad \cos(\frac{2\pi N}{l} - \alpha)l = \cos \alpha l,$$

$$\sin \frac{(\frac{2\pi N}{l} - \alpha)h}{2} = \sin \frac{\alpha h}{2}, \qquad \cos \frac{(\frac{2\pi N}{l} - \alpha)h}{2} = -\cos \frac{\alpha h}{2}.$$

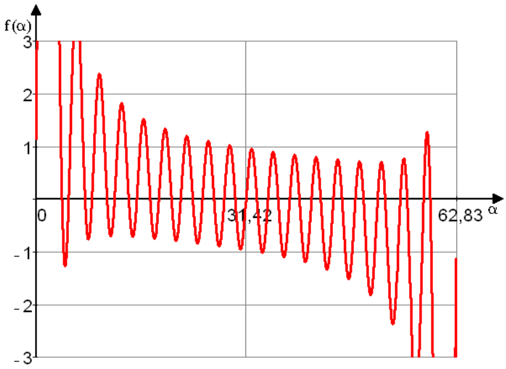
6.1 išvada. Iš 6.1 ir 6.2 lemų seka, kad tikrinės reikšmės λ_k, gaunamos iš (6.45) lygties, yra skirtingos tik intervale $\alpha \in (0, \pi N/l)$. Funkcijos $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ šaknims, kurios nepriklauso šiam intervalui, atitinkamos tikrinės reikšmės λ_k pradeda kartotis (6.2 paveikslas). Jei $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$, $N = 10$, $l = 1$, tai yra 35 skirtingos funkcijos $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ šaknys intervale $(0, 20\pi)$. Yra lengva apskaičiuoti, kad $\alpha_1 = 20\pi - \alpha_{35} \approx 3,9238$; $\alpha_2 = 20\pi - \alpha_{34} \approx 4,9158$; $\alpha_3 = 20\pi - \alpha_{33} = 7,3765$ ir t.t. Taigi gauname, kad intervale $(0, 10\pi)$ yra 17 skirtingų šaknų (dvi tikrinės reikšmės yra neigiamos, kurios gaunamos iš (6.53) lygties).

3 atvejis: $\lambda < 0$. Jei $\lambda < 0$, tai $1 - h^2\lambda/2 > 1$. Pažymėkime

$$1 - \frac{h^2\lambda}{2} = \text{ch}\beta h.$$

Iš to seka, kad

$$\lambda = -\frac{4}{h^2}\text{sh}^2\frac{\beta h}{2}.$$



6.2 pav. Funkcijos $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ nuliai pirmame periode $\alpha \in (0, 2\pi N/l)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$, $N = 10$, $l = 1$. Iš (6.46) lygties gauname 17 teigiamų tikrinių reikšmių (ir 2 neigiamos)

Fig. 6.2. Zeroes of function $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ in period $\alpha \in (0, 2\pi N/l)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$, $N = 10$, $l = 1$. We get 17 positive eigenvalues from equation (6.46) (and 2 negative)

Bendrasis (6.43) lygties sprendinys yra

$$U_i = C_1 \mathrm{ch}\beta ih + C_2 \mathrm{sh}\beta ih. \tag{6.51}$$

6.3 teorema. Jei matrica A turi neigiamų tikrinių reikšmių, tai jos turi pavidalą

$$\lambda_k = -\frac{4}{h^2}\mathrm{sh}^2\frac{\beta_\mathrm{k}\mathrm{h}}{2}, \tag{6.52}$$

čia β_k yra teigiamos šios lygties šaknys:

$$\frac{24\mathrm{sh}\beta \mathrm{l}}{B\beta l}\Big(\frac{\mathrm{sh}\beta\mathrm{l}}{A\beta^2}-\frac{l\mathrm{ch}\beta\mathrm{l}}{B\beta}\Big)\gamma_1\gamma_2+ \\ +\Big(\frac{2l\mathrm{sh}^2\beta\mathrm{l}}{B\beta}-6\mathrm{ch}\beta\mathrm{l}\big(\frac{\mathrm{sh}\beta\mathrm{l}}{\mathrm{A}\beta^2}-\frac{\mathrm{lch}\beta\mathrm{l}}{\mathrm{B}\beta}\big)\Big)(\gamma_1+\gamma_2)-2\mathrm{l}^2\mathrm{ch}\beta\mathrm{lsh}\beta\mathrm{l}=0, \tag{6.53}$$

$$A = \frac{4}{\beta^2 h^2}\mathrm{sh}^2\frac{\beta\mathrm{h}}{2}, \quad \mathrm{B} = \frac{2}{\beta\mathrm{h}}\mathrm{th}\frac{\beta\mathrm{h}}{2}. \tag{6.54}$$

Teoremos įrodymas yra analogiškas 6.2 teoremos įrodymui.

6.5. Skaitinis eksperimentas

Skaitinis eksperimentas buvo atliekamas norint išsamiau ištirti perėjimo matricos A spektro savybes. Šis eksperimentas leidžia išsiaiškinti tam tikrus nelokaliųjų uždavinių bendrumus ir tokių uždavinių specifiką. Vienas iš pagrindinių atliekamo skaitinio eksperimento tikslų yra rasti neigiamų ir teigiamų matricos A tikrinių reikšmių skaičių ir nustatyti to skaičiaus priklausomybę nuo parametrų γ_1, γ_2 reikšmių. Termotamprumo uždaviniuose (Day 1983) dažniausiai aptinkamos šių parametrų reikšmės $\gamma_1 = \gamma_2 < 0$. Tiksliau:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{\Theta_0 B^2}{2cA},$$

čia Θ_0 yra pradinė vienodai pasiskirsčiusi temperatūra, c – savitoji šiluma, esant pastoviai deformacijai, A – standumas lenkimui ir B – kryžminio ryšio tarp šiluminių ir mechaninių efektų matas. Taigi atvejį, kai $\gamma_1 = \gamma_2$, išanalizuokime detaliau. Pristatysime gautus eksperimento rezultatus.

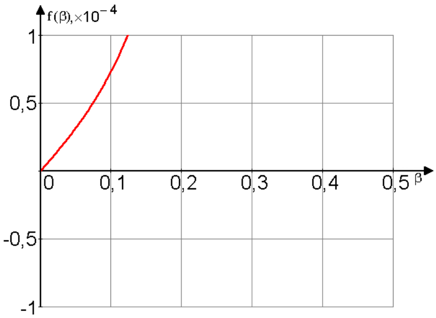
Pirmiausiai pastebėsime, kad dvi hiperbolės šakos, gaunamos iš (6.37) lygties, padalina visą sritį (γ_1, γ_2) į tris neaprėžtas sritis (6.1 paveikslas). Sritimi S_1 pažymėta sritis, esanti žemiau abiejų hiperbolės šakų. Joje yra koordinačių pradžios taškas $(\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0)$ ir visos γ_1, γ_2 reikšmės, kurios tenkina sąlygą $\gamma_1 = \gamma_2 < 0$. Sritis S_2 yra tarp dviejų hiperbolės šakų, sritis S_3 yra virš šios hiperbolės šakų.

Tuo atveju, kai taškas (γ_1, γ_2) priklauso hiperbolei, tada su šiomis γ_1, γ_2 išraiškomis $\lambda = 0$ yra matricos A tikrinė reikšmė.

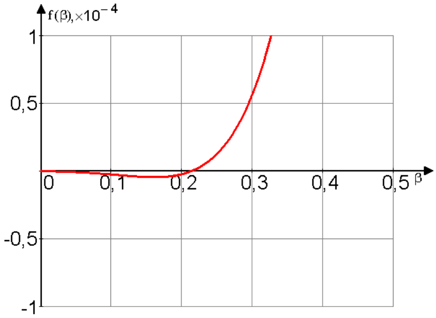
Kai $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, tai turime (6.34)–(6.36) klasikinį uždavinį. Be to, visos matricos A tikrinės reikšmės yra realios ir skirtingos. Kadangi matricos A tikrinės reikšmės yra tolydžios matricos elementų funkcijos, tai srityje S_1 visos matricos A realios tikrinės reikšmės yra teigiamos. Šiuo atveju nulinės ir neigiamų tikrinių reikšmių nėra.

Jei γ_1,γ_2 reikšmes keistume taip, kad taškas $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_1$ artėtų prie hiperbolės tada atitinkamai teigiama tikrinė reikšmė artėtų prie nulinės ir taptų nuline tikrine reikšme, kai (γ_1, γ_2) tampa hiperbolės tašku. Kai taškas $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$, (6.53) lygtis turi vieną teigiamą šaknį, t. y. egzistuoja viena neigiama matricos A tikrinė reikšmė ((6.26) nelygybė galioja prie bet kokių h reikšmių, kai $\gamma_1 + \gamma_2 < 0$; jei $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, h turi būti pakankamai mažas).

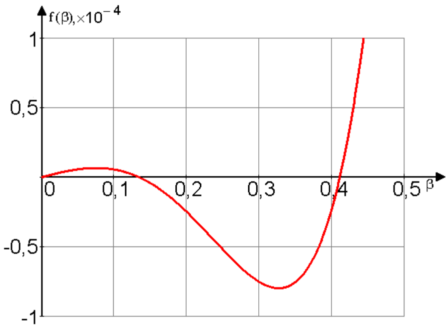
Tuo atveju, kai $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_3$, matrica A turi dvi neigiamas tikrines reikšmes,



6.3 pav. Funkcija $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,49$, $l = 1$, $N = 10$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_1$. Intervale $\beta \in (0,\infty)$ šaknų nėra
Fig. 6.3. Function $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,49$, $l = 1$, $N = 10$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_1$. There are no roots in the interval $\beta \in (0,\infty)$



6.4 pav. Funkcija $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,499$, $l = 1$, $N = 10$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_2$. Intervale $\beta \in (0,\infty)$ yra viena šaknis
Fig. 6.4. Function $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,499$, $l = 1$, $N = 10$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_2$. There is one root in the interval $\beta \in (0,\infty)$



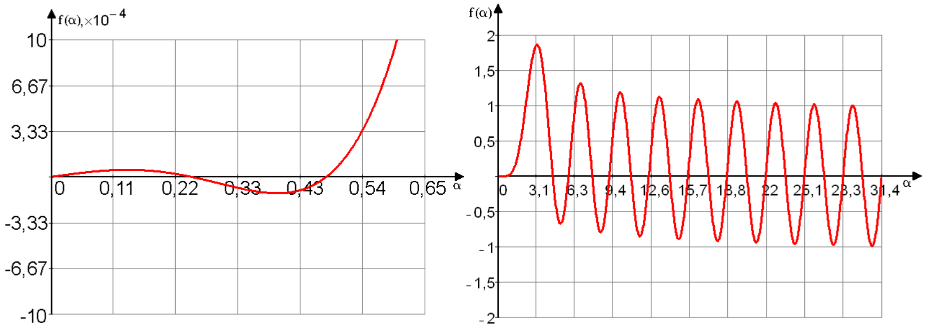
6.5 pav. Funkcija $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,503$, $l = 1$, $N = 10$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_3$. Intervale $\beta \in (0,\infty)$ yra dvi šaknys
Fig. 6.5. Function $f(\beta,\gamma_1,\gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,503$, $l = 1$, $N = 10$, $(\gamma_1,\gamma_2) \in S_2$. There are 2 roots in the interval $\beta \in (0,\infty)$

jei h yra pakankamai mažas, t. y. jei

$$h < h_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \sqrt{\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2}}{3\gamma_1\gamma_2}. \tag{6.55}$$

Dėl tos priežasties pakankama (6.22) skirtuminės schemos stabilumo sąlyga yra $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_1$.

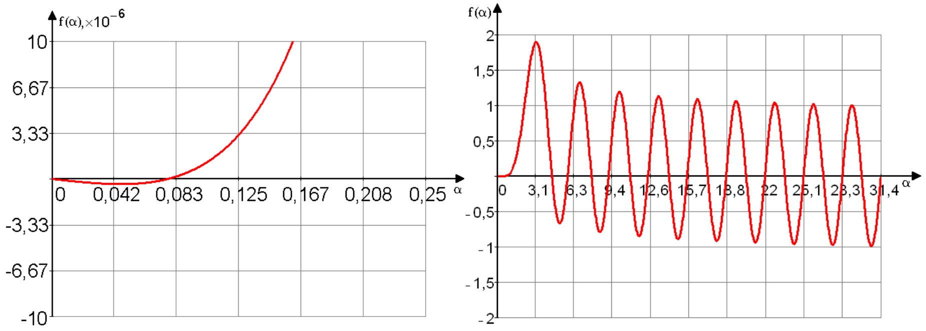
Tipiškas neigiamų tikrinių reikšmių atsiradimo atvejis parodytas 6.3–6.5 paveiksluose. Šiuose paveiksluose atvaizduoti funkcijos $f(\beta, \gamma_1, \gamma_2)$ grafikai, kai $h = 1/10$. Čia funkcija $f(\beta, \gamma_1, \gamma_2)$ yra (6.53) lygties kairioji pusė. Pastebėsime, kad, pagal 6.1 teoremą, $\lambda = 0$, kai $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 \approx 0,4982$ ir $\gamma_1 = \gamma_2 \approx 0,5018$. Be to, kai $\gamma < 0,4982$, (6.53) lygtis neturi teigiamos šaknies; kai $0,4982 < \gamma < 0,5018$, tada egzistuoja vienintelė teigiama šaknis; kai $\gamma > 0,5018$, tada egzistuoja dvi šaknys. Tai reiškia, kad kai $\gamma < 0,4982$ matrica A neturi neigiamų tikrinių reikšmių; kai $0,4982 < \gamma < 0,5018$, tada egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė λ_1, gaunama iš (6.52) formulės; kai $\gamma > 0,5018$, tuo atveju egzistuoja dvi neigiamos tikrinės reikšmės.



6.6 pav. Funkcija $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,49$, $l = 1$, $N = 10, (\gamma_1,\ ga_2) \in S_1$. Intervale $\alpha \in (0, 10\pi)$ yra 19 šaknų ($2N - 1 = 19$)
Fig. 6.6. Function $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,49$, $l = 1$, $N = 10, (\gamma_1,\ ga_2) \in S_1$. There are 19 roots ($2N - 1 = 19$) in the interval $\alpha \in (0, 10\pi)$

Atveju, kai $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_3$, matrica A turi dvi neigiamas tikrines reikšmes, jei h tenkina (6.55) nelygybę. Tada neišpildyta stabilumo sąlyga. Jei $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_3$, gauname, kad netenkinama skirtuminės schemos stabilumo savybė $\rho(S) < 1$ pakankamai mažoms h reikšmėms. Ši sąlyga $\rho(S) < 1$ gali būti teisinga, jei h nėra per mažas, t. y. prie tam tikrų didelių h reikšmių stabilumo sąlygos yra tenkinamos. Tai yra įrodyta straipsnyje (Sapagovas 2005) uždaviniams su (6.12), (6.13) nelokaliosiomis sąlygomis, kai $\alpha = const$, $\beta = const$.

6.6–6.8 paveiksluose pavaizduota funkcijos $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$ grafikai (kairė (6.46) lygties pusė). Iš jų matyti teigiamų šaknų, gautų iš (6.46) lygties, skaičius, t. y. teigiamų matricos A tikrinių reikšmių skaičius. Vadinasi, visais trimis atvejais ($\gamma = 0,49; 0,499; 0,503$) bendras teigiamų ir neigiamų matricos A tikrinių reikšmių skaičius yra $2N - 1$, t. y. sutampa su matricos eile. Šiuo atveju kompleksinių tikrinių reikšmių nėra. Taip pat nėra ir teigiamų tikrinių reikšmių, netenkinančių (6.44) nelygybę. Jei $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$, pakankama skirtuminės schemos stabilumo sąlyga $\rho(S) < 1$ netenkinama.



6.7 pav. Funkcija $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,499$, $l = 1$, $N = 10, (\gamma_1, \gamma_2) \in S_2$. Intervale $\alpha \in (0, 10\pi)$ yra 18 šaknų

Fig. 6.7. Function $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,499$, $l = 1$, $N = 10, (\gamma_1,\ ga_2) \in S_1$. There are 18 roots in the interval $\alpha \in (0, 10\pi)$

Pasinaudokime tuo, kad jei tenkinama (6.26) sąlyga, tai (6.34)–(6.36) tikrinių reikšmių uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis yra ekvivalentus matricos A ($(2N-1)$ eilės) tikrinių reikšmių uždaviniui (Sapagovas 2008). Jei ši sąlyga negalioja, turime, kad

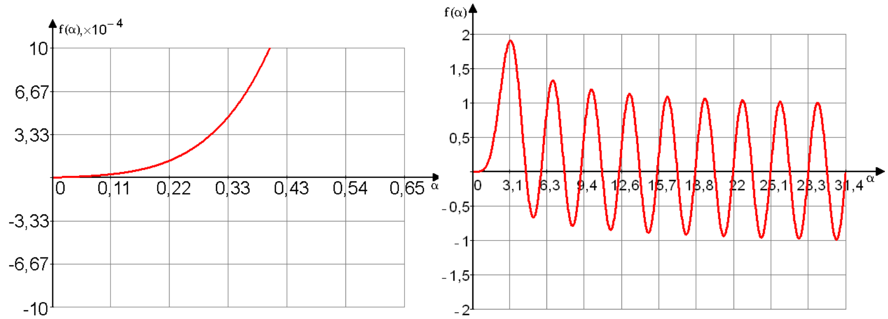
$$1 - \frac{2h(\gamma_1 + \gamma_2)}{l} + \frac{3h^2\gamma_1\gamma_2}{l^2} = 0 \tag{6.56}$$

(6.34)–(6.36) tikrinių reikšmių uždavinys negali būti suvestas į matricos A ($(2N-1)$ eilės) tikrinių reikšmių uždavinį. Tuo atveju, kai $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, (6.56) lygybė yra teisinga

$$h_1 = \frac{1}{3\gamma l}, \quad h_2 = \frac{1}{\gamma l}. \tag{6.57}$$

Pavyzdžiui, jei $l = 1$, $N = 10$, tada (6.57) lygybė galioja kai $\gamma^{(1)} = 10/3$, $\gamma^{(2)} = 10$ reikšmių.

Jei γ didėja ir pasiekia reikšmę $\gamma_1^{(1)} = 10/3$, tada viena iš neigiamų (6.34)–(6.36) uždavinio reikšmių keičiasi nuo $-\infty$ iki $+\infty$. Atsiranda viena teigiama tikrinė reikšmė (prie pakankamai mažo h). Su panašia situacija susiduriame kai γ didėja ir pasiekia tašką $\gamma_1^{(2)} = 10$. Šiuo atveju atsiranda antra neigiama tikrinė



6.8 pav. Funkcija $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,503$, $l = 1$, $N = 10, (\gamma_1, \gamma_2) \in S_3$. Intervale $\alpha \in (0, 10\pi)$ yra 17 šaknų
Fig. 6.8. Function $\Phi(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,503$, $l = 1$, $N = 10, (\gamma_1, \ ga_2) \in S_1$. Tere are 17 roots in the interval $\alpha \in (0, 10\pi)$

reikšmė. Šis efektas pastebėtas anksčiau, kai h yra pakankamai mažas, t. y. $h < h_1 = 0.1$. Tai susiję su charakteristinų funkcijų poliais, kurių išsami analizė pateikta straipsnyje (Štikonas 2007).

Norint pademonstruoti skirtuminės schemos stabilumo tyrimą, buvo spręstas iliustracinis (6.11)–(6.14) uždavinys. Funkcijos $f(x,t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ ir $\varphi(x)$ parinktos taip, kad $u(x,t) = e^{x+t}$ būtų skirtuminio uždavinio sprendinys.

6.1, 6.2 lentelėse pateikta maksimali baigtinių skirtumų metodo paklaida

$$\varepsilon = \max_{-N \leq i \leq N} |u(x_i, t^j) - U_i^j|,$$

kai $t = 2$.

Pagal pateiktus skaičiavimo duomenis, iš 6.1 ir 6.2 lentelių gerai matyti, kad $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_1$ yra pakankama skirtuminių schemų stabilumo sąlyga. Dar daugiau, rezultatai rodo, kad pakankamai didelėms $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ reikšmėms, $(\gamma_1, \gamma_2) \in S_3$, galima rasti skirtuminės schemos sprendinį su pakankamu tikslumu, kai h reikšmės nėra mažos.

6.6. Šeštojo skyriaus išvados

- Išnagrinėtas baigtinių skirtuminių schemų stabilumas paraboliniam uždaviniui su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Uždavinys parinktas iš kvazistatinės tamprumo teorijos. Stabilumo sąlygos suformuluotos remiantis skirtuminės lygčių sistemos perėjimo matricos tikrinių reikšmių

6.1 lentelė. Paklaida ε skirtingiems γ_1, γ_2 $(h = 0.025, \tau = h^2/2, t = 2, l = 1)$
Table 6.1. Error ε for different γ_1, γ_2 $(h = 0.025, \tau = h^2/2, t = 2, l = 1)$

γ_1	γ_2	ε
-100	-100	$0,425 \cdot 10^{-2}$
-10	-10	$0,402 \cdot 10^{-2}$
-10	0,25	$0,312 \cdot 10^{-2}$
0,25	-10	$0,443 \cdot 10^{-2}$
-1	-1	$0,275 \cdot 10^{-2}$
0	0	$0,326 \cdot 10^{-3}$
0,25	0,25	$0,355 \cdot 10^{-2}$
0,5	0,5	$0,487 \cdot 10^{-2}$
0,51	0,51	$0,623 \cdot 10^{-1}$
0,55	0,55	$0,245$

6.2 lentelė. Paklaida ε skirtingiems N $(\gamma_1, \gamma_2 = 1000, h = l/N,$ $\tau = h^2/2,\ t = 2, l = 1)$
Table 6.2. Error ε for different N $(\gamma_1, \gamma_2 = 1000, h = l/N, \tau = h^2/2,$ $t = 2, l = 1)$

N	ε
10	$0,728 \cdot 10^{-1}$
20	$0,182 \cdot 10^{-1}$
40	$0,415 \cdot 10^{-2}$
80	$0,132 \cdot 10^{-2}$
160	$0,501 \cdot 10^{-2}$
320	$0,197 \cdot 10^{-1}$
640	$0,721 \cdot 10^{-1}$
1280	$0,272$
2560	$nestabilu$

analize. Nustatyta skirtuminės schemos stabilumo sritis, kuri, parametrų γ_1, γ_2 atžvilgiu, nusakoma hiperbolės šakomis. Srityje, kuriai priklauso taškas $(0, 0)$, yra stabilu. Ši sritis plokštumoje (γ_1, γ_2) yra žemiau abiejų hiperbolės šakų. Tuo atveju, kai $h \to 0$, hiperbolė pereina į dvi statmenai susikertančias tieses.

- Atliktas skaitinis eksperimentas, kurio išdavoje pateiktas skirtuminės lygčių sistemos perėjimo matricos spektro savybių tyrimas. Gauta, kad bendras realiųjų tikrinių reikšmių skaičius sutampa su skirtuminių lygčių sistemos eile. Dėl to galima teigti, kad kompleksinių tikrinių reikšmių nėra. Gauta, kad skirtuminės schemos stabilumas nepriklauso nuo parametro l reikšmės iš nelokaliųjų integralinių sąlygų.

Bendrosios išvados

1. Nagrinėjant diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis ir pastoviais koeficientais spektro struktūrą nustatyta, kad šio operatoriaus spektras priklauso nuo vieno parametro $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Priklausomai nuo šio parametro reikšmių gali egzistuoti nulinė, viena neigiama ir be galo daug teigiamų tikrinių reikšmių. Analogiški teiginiai teisingi ir skirtuminiam operatoriui su nelokaliosiomis sąlygomis, tik teigiamų tikrinių reikšmių yra baigtinis skaičius.

2. Kai integralinėse sąlygose yra kintami svorio koeficientai, tai gali atsirasti kompleksinės tikrinės reikšmės. Šio uždavinio atveju nulinė ir neigiamos tikrinės reikšmės priklauso nuo taško (γ_1, γ_2) padėties hiperbolės atžvilgiu. Kai taškas (γ_1, γ_2) priklauso hiperbolei, tai $\lambda = 0$ yra nagrinėjamo uždavinio tikrinė reikšmė.

3. Kai diferencialinėje lygtyje yra kintami koeficientai, tai tikrinės reikšmės $\lambda = 0$ apibrėžimo sritis priklauso nuo kintamųjų koeficientų pobūdžio, t. y. nulinė tikrinė reikšmė gali atsirasti prie didesnių (ar mažesnių) $\gamma_1 + \gamma_2$ reikšmių, priklausomai nuo kintamojo koeficiento (simetrinė, monotoniškai didėjanti ar monotoniškai mažėjanti funkcija) tipo.

4. Rezultatus, gautus tiriant diferencialinių operatorių su integralinėmis sąlygomis spektro struktūrą, galime pritaikyti dvimačių elipsinio tipo di-

ferencialinių operatorių tikrinėms reikšmėms nagrinėti bei parabolinių lygčių su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis skirtuminių schemų stabilumo analizei.

Literatūra ir šaltiniai

Agarwal, R. 1998. *Focal boundary value problems for differential and difference equations*. Kluwer AP.

Agmon, S. 1962. On the eigenfunctions and eigenvalues of general boundary value problems. *Comm. Pure Apll. Math.* 15: 119–147.

Ang, W. 2006. Numerical solution of a non classical parabolic problem, an integro-differential approach. *Applied Mathematics and Computation* 175(2): 969–979.

Avalishvili, M.; Gordeziani, D. 2003. Investigation of two-dimensional models of elastic prismatic shell. *Georgian Mathematical Journal* 10(1): 17–36.

Bachvalov, N.; Židkov, A.; Kobelkov, G. 2001. *Čislienyje metody.* Moskva–Sankt-Peterburg: Fizmatlit.

Bandyrskii, B.; Makarov, V. 2000. Sufficient conditions for the eigenvalues of the operator $-d/dx^2 + q(x)$ with the Ionkin–Samarskii conditions to be real valued. *Comput. Math., Math. Phys.* 40(12): 1715–1728.

Bandyrskii, B.; Lazurchak, I.; Makarov, V.; Sapagovas, M. 2006. Eigenvalue problem for the second order differential equation with nonlocal conditions. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 11(1): 13–32.

Baronas, R.; Ivanauskas, F.; Sapagovas, M. 1999. Modelling of wood drying and an influence of lumber geometry on drying dynamics. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 4: 11–22.

Bastys, A.; Ivanauskas, F.; Sapagovas, M. 2005. An explicit solution of a parabolic equation with nonlocal boundary conditions. *Lithuanian Math. J.* 45(3): 257–271.

Beilin, S. 2001. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions. *Electronic Journal of Differential Equations* 42: 1–8.

Berikelaschvili, G. K. 2003. On the convergence of difference solution of one nonlocal boundary value problem for second order eliptic equation. *Differential Equations* 39(7): 896–903.

Bitsadze, A.; Samarskii, A. 1969. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 185: 739–740.

Borovykh, N. 2002. Stability in the numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions. *Applied Numerical Mathematics* 42: 17–27.

Boucherif, A. 2001. Differential equations with nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Analysis* 47: 2419–2430.

Bouziani, A. 1997. Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques. *Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique* 53–70.

Bouziani, A. 1999. On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique* 61–77.

Būda, V. 1987. *Vycheslitelnyi eksperiment v nelineinoi difuzii*: Daktaro disertacija. Minskas: (rusų kalba).

Būda, V.; Čiegis, R.; Sapagovas, M. 1986. A model of multiple diffusion from a limited source. *Diff. Equat. and their Applic.* 38: 9–14. (rusų kalba).

Cahlon, B.; Kulkarni, D.; Shi, P. 1995. Stepwise stability for the heat equation with a nonlocal constrain. *SIAM J. Numer. Anal.* 32(2): 571–593.

Cannon, J. 1963. The solution of the heat equation subject to specification of energy. *Quart. Appl. Math.* 21(2): 155–160.

Cannon, J.; Lin, Y.; Matheson, A. 1993. The solution of the diffusion equation in two-space variables subject to specification of mass. *Appl. Anal. J.* 50: 1–19.

Cao, D.; Ma, R. 2000. Positive solutions to a second order multi-point boundary value problem. *Electronic Journal of Differential Equations* 65: 1–8.

Choi, Y.; Chan, K. 1992. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry. *Nonlinear Analysis, Theory, Method* 18(4): 317–331.

Collatz, L. 1964. *Funktionalanalysis und numerische mathematik*. Springer-Verlag.

Čiegis, R. 2003. *Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai*. Vilnius: Technika.

Čiegis, R. 2005. Economical difference schemes for the solution of a two-dimensional parabolic problem with integral condition. *Differ. Equ.* 41(7): 1025–1029.

Čiegis, R. 2006. Parallel numerical algorithms for 3d parabolic problem with nonlocal boundary condition. *Informatica* 17(3): 309–324.

Čiegis, R. 1984. Numerical solution the heat equation with nonlocal condition. *Liet. Matem. Rink.* 24(4): 206–215.

Čiegis, R. 1998. On the aposteriori error estimates for finite-element solutions. *Mathematical Modelling and Analysis* 3: 5–16.

Čiegis, R.; Čiupaila, R. 1990. Some aspects of the solution of static liquid metal contact problems. *Lithuanian Math. J.* 30(2): 392–404.

Čiegis, R.; Meilūnas, M. 1993. On the difference scheme for a nonlinear diffusion reaction type problem. *Liet. Matem. Rink.* 33(1): 16–29.

Čiegis, R.; Sapagovas, M.; Čiupaila, R. 1995. Numerical experiment in modelling of liquid-metal contacts, in *Mathem. Modell. Technol. Problems* 57–70.

Čiegis, R.; Štikonas, A.; Štikonienė, O.; Subač, O. 2001. Stationary problems with nonlocal boundary conditions. *Mathematical Modelling and Analysis* 6(2): 178–191.

Čiegis, R.; Jakušev, A.; Krylovas, A.; Subač, O. 2002a. Parallel algorithms for solution of nonlinear diffusion problems in image smoothing. *Mathematical Modelling and Analysis* 10(2): 155–172.

Čiegis, R.; Štikonas, A.; Štikonienė, O.; Subač, O. 2002b. A monotonic finite-difference scheme for a parabolic problem with nonlocal conditions. *Differential Equations* 38(7): 1027–1037.

Čiupaila, R. 1992. *Chislenoe reshenie zadach opredelenia svabodnoi poverxnosti zhidkometalicheskii kontaktov s zadanym objomom*: Daktaro disertacija. Minskas: (rusų kalba).

Day, W. 1982. Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and order theories. *Quart. Applied Mathem.* 40: 319–330.

Day, W. 1983. A decreasing property of solutions of the parabolic equations with applications to thermoelasticity. *Quart. Applied Mathem.* 41: 468–475.

Day, W. 1985. *Heat conduction within linear thermoelasticity*. Springer-Verlag.

Day, W. 1992. Parabolic equations and thermoelasticity. *Quart. Applied Mathem.* 50: 523–533.

Dehghan, M. 2002. Second-order schemes for a boundary value problem with Neumann's boundary conditions. *J. Comput. Appl. Math.* 138: 173–184.

Dehghan, M. 2003. Numerical solution of a parabolic equation with non-local boundary specifications. *Appl. Math. Comput.* 145: 185–194.

Dehghan, M. 2005. Efficient techniques for the second-orfer parabolic equation subject to nonlocal specifications. *Applied Numerical Mathematics* 52(1): 39–62.

Dehghan, M. 2007. The one-dimensional heat equation subject to a boundary integral specification. *Chaos, Solitons and Fractals* 32(2): 661–675.

Ekolin, G. 1991. Finite difference methods for a nonlocal boundary value problem for the heat equation. *BIT* 31: 245–261.

Eloe, P.; Henderson, J. 2007. Uniqueness implies existence and uniqueness conditions for nonlocal boundary value problems for n-th order differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* (331): 240–247.

Eloe, P.; Henderson, J. 1997. Positive solutions and nonlinear multipoint conjugate eigenvalue problems. *Electron. J. Differential Equations* (8): 1–11.

Erbe, L. 2000. Eigenvalue criteria for existence of positive solutions to nonlinear boundary value problems. *Math. Comput. Modelling* 32: 529–539.

Erbe, L.; Hu, S.; Wang, H. 1994. Multiple positive solutions of some boundary value problems. *J. Math. Analysis Applic.* 184: 640–648.

Fairweather, G.; Lopez-Marcos, J. 1996. Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal conditions. *Advances in Comput. Mathem.* 6: 243–262.

Fairweather, G.; Saylor, R. 1991. The reformulation and numerical solution of certain nonclassical initial–boundary value problems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 12(1): 127–144.

Finn, R. 1986. *Equilibrium Capillary Surfaces*.

Friedman, A. 1986. Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Quart. Appl. Math.* 44: 401–407.

Goolin, A.; I.Ionkin, ; Morozova, V. 2001. Difference schemes with nonlocal boundary conditions. *Computational Methods in Applied Mathematics* 1(1): 62–71.

Gordeziani, D.; Avalishvili, G. 2000. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations. *Math. Modell.* 12(1): 94–103.

Gordeziani, D.; Avalishvili, G. 2001. Investigation of the nonlocal initial boundary value problems for some hyperbolic equations. *Hirosima Math. J.* 31: 345–366.

Gordeziani, D.; Davitashvili, T. 1999. Mathematical model of the atmosphere pollution with non-classic boundary condition. *Applied Mathem. and Informatics* 4(1): 75–92.

Gordeziani, D.; Gordeziani, N.; Avalishvili, G. 1998. Nonlocal boundary value problems for some partial differential equations. *Bull. Georgian Acad. Sci.* 157(3): 365–368.

Gordeziani, N. 2000. On some non-local problems of the theory of elasticity. *Buletin of TICMI* 4: 43–46.

Gradstein, I.; Ryzhik, I. 1974. *Tablici integralov, summ, rjadov i proizvedenii*. Nauka, Moskva.

Graef, J.; Webb, J. 2009. Third order boundary value problems with nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Analysis* 71: 1542–1551.

Greenberg, L.; Marletta, M. 2001. Numerical solution of non-self-adjoint Sturm-Liouville problems and related systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38(6): 1800–1845.

Gulin, A.; Morozova, V. 2003. On the stability of the nonlocal difference boundary value problem. *Diff. Equations* 39(7): 912–917.

Gulin, A.; Morozova, V. 2009. Stability of the two-parameter set of nonlocal difference schemes. *Computational Methods in Applied Mathematics* 9(1): 79–99.

Gulin, A.; Ionkin, N.; Morozova, V. 2001. Stability of a nonlocal two-dimensional finite-difference problem. *Differ. Equations* 37(7): 960–978.

Gulin, A.; Ionkin, N.; Morozova, V. 2006a. Stability criterion of difference schemes for the heat conduction equation with nonlocal boundary conditions. *Computational Methods in Applied Mathematics* 6(1): 31–55.

Gulin, A.; Ionkin, N.; Morozova, V. 2006b. Study of the norm in stability problems for nonlocal difference schemes. *Differ. Equ.* 42(7): 974–984.

Gupta, C.; Trofimchuk, S. 1997. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem. *J. Math. Analysis Appl.* 205: 586–597.

Gupta, C.; Ntouyas, S.; Tsamatos, P. 1994. On an m-point boundary value problem for second order ordinary differential equations. *Nonlinear Analysis TMA* 23: 1427–1436.

Hairer, E.; Wanner, G. 1996. *Solving Ordinary Differential Equations II, 2nd ed.*

Henderson, J.; Wang, H. 1997. Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems. *J. Math. Anal. Appl.* 208: 252–259.

Il'in, V. 1976. Necessary and sufficient properties of being a basis of a subsystem of eigenfunctions and adjoint functions for Keldysh bundle for odinary differential operators. *Doklady Acad. Nauk SSSR* 227(4): 796–799.

Il'in, V.; Moiseev, E. 1990. Two-dimensional nonlocal boundary value problems for Poissons's operator in differential and difference variants. *Math. Modelling, Russia* 2(4): 139–159 (rusų kalba).

Il'in, V.; Moiseev, E. 1987. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects. *Differential Equations* 23(7): 803–810 (rusų kalba).

Infante, G. 2003. Eigenvalues of some non-local boundary-value problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 46: 75–86.

Infante, G. 2005. Eigenvalues and positive solutions of odes involving integral boundary conditions. *Discrete and continuous dynamical systems, Supplement Volume* 436–442.

Infante, G.; Webb, J. 2002. Nonzero solutions of Hammerstein integral equations with discontinuous kernels. *J. Math. Analysis. Applic.* 272: 30–42.

Infante, G.; Webb, J. 2003. Three–point boundary value problems with solutions that change sign. *J. Integ. Eqns. Appl.* 15(1): 37–57.

Ionkin, N. 1977. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Diff. Equations* 13(2): 294–304 (rusų kalba).

Ionkin, N.; Morozova, V. 2000. Two dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions. *Diff. Equations* 36(7): 884–888 (rusų kalba).

Ionkin, N.; Valikova, E. 1996. On eigenvalues and eigenfunctions of a nonclassical boundary value problem. *Math. Modelling, Russia* 8(1): 53–63 (rusų kalba).

Ionkin, N.; Makarov, V.; Furletov, D. 1992. Stability and convergence of difference schemes in Chebyshev norm for parabolic equation with nonlocal boundary condition. *Math. Modelling, Russia* 4(4): 63–73 (rusų kalba).

Ivanauskas, F.; Meškauskas, T.; Sapagovas, M. 2009. Stability of difference schemes for two–dimensional parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Applied. Math. Computation* (priimtas spaudai).

Kalna, G.; McKee, S. 2004. The termostat problem with a nonlocal nonlinear boundary condition. *IMA J. Applied. Math.* 69: 437–462.

Kamynin, L. 1964. A boundary value problem in the theory of the heat conduction with nonclassical boundary condition. *Zh. Vychisl. Math.* 4(6): 1006–1024 (rusų kalba).

Karakostas, G.; Tsamatos, P. 2000a. Positive solutions for a nonlocal boundary-value problem with increasing response. *Electronic J. of Differential Equations* 2000(73): 1–8.

Karakostas, G.; Tsamatos, P. 2000b. Positive solutions of a boundary-value problem for second order ordinary differential equations. *Electronic J. of Differential Equations* 2000(49): 1–9.

Karakostas, G.; Tsamatos, P. 2002. Sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of a nonlocal boundary value problem. *Applied Mathematics Letters* 15(4): 401–407.

Kvedaras, B. 1967. On the boundary value problem with integral condition for the system of differential equations of second order. *Liet. matem. rink.* 7(1): 59–77 (rusų kalba).

Kvedaras, B.; Sapagovas, M. 1974. *Skaičiavimo metodai*. Vilnius: Mintis.

Lan, K. 2000. Eigenvalues of second order differential equations with singularities. *Proc. Int. Conf. on Dynamical Systems and Differential Equations* 241–247.

Langer, M. 2000. Eigenvalues of a λ-rational Sturm–Liouville problem. *Math. Nachr.* 210: 163–176.

Liu, Y. 1999. Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 110: 115–127.

Lomtatidze, A. 1995. On a nonlocal boundary value problem for second order linear ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 193(3): 889–908.

Ma, H. 2008. Symmetric positive solutions for nonlocal boundary value problems of fourth order. *Nonlinear Analysis* 68: 645–651.

Ma, R. 2000. Multiplicity of positive solutions for second-order three-point boundary value problems. *Comput. Math. Appl.* 40: 193–204.

Ma, R. 2007. A survey on nonlocal boundary value problems. *Appl. Math.* 7: 257–279.

Ma, R. 1998. Positive solutions for a nonlinear three-point boundary-value problem. *Electronic J. of Differential equations* 34: 1–8.

Makarov, V.; Kulyev, D. 1985a. The line method for quasilinear parabolic equation with nonlocal boundary condition. *Ukrain Math. J.* 37(1): 42–48.

Makarov, V.; Kulyev, D. 1985b. Solution of a boundary value problem for a quasilinear equation of parabolic type with nonclassical boundary condition. *Diff. Equations* 21(2): 296–305 (rusų kalba).

Makarov, V.; Lazurchak, I.; Bandyrsky, B. 2003. Nonclassical asimptotic formulas and approximation of arbitrary order of accuracy of the eigenvalues in Sturm–Liouville problem with Bicadze–Sammarskii conditions. *Cybern. System*

Anal. 6: 862–879 (rusų kalba).

Manteuffel, T. 1977. The Chebyshev iteration for nonsymmetric linear systems. *Numer. Math.* 28: 307–327.

Mennicken, R.; Moller, M. 2003. *Non–Self–Adjoint boundary eigenvalue problems*. Elsevier.

Merazga, N.; Bouziani, A. 2005. Rothe time-discretization method for a nonlocal problem arising in thermoelasticity. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* 1: 13–28.

Naimark, N. 1969. *Linear Differential Operators*. Moscow (rusų kalba).

Nakhushev, A. 1995. *Equations of Mathematical Biology*. Vysshaya Shola, Moscow (rusų kalba).

Palamides, P. 2002. Positive and monotone solutions of m-point boundary-value problem. *Electronic J. of differential Equations* 2002: 1–16.

Pao, C. 1995a. Dynamics of reaction - diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *Quart. Appl. Math.* 53: 173–186.

Pao, C. 1995b. Reaction diffusion equations with non-local boundary and non-local initial conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 195: 702–718.

Pao, C. 1998. Asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *J. Comput. Appl. Math.* 88: 225–238.

Paulauskas, V. 1974. *Matematinės fizikos lygtys*. Vilnius: Mintis.

Pečiulytė, S. 2006. *Kraštinių uždavinių su įvairių tipų nelokaliosiomis sąlygomis tyrimas ir skaitinė analizė*: Daktaro disertacija. Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Vilnius.

Pečiulytė, S.; Štikonas, A. 2006. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal two points boundary condition. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 11(1): 47–78.

Pečiulytė, S.; Štikonas, A. 2007a. On positive eifgenfunctions of Sturm–Liouville problem with nonlocal two-point boundary condition. *Mathematical Modelling and Analysis* 12(2): 215–226.

Pečiulytė, S.; Štikonas, A. 2007b. Distribution of the critical and other points in boundary problems with nonlocal boundary condition. *Liet. mat. rink.* 47(spec. nr.): 405–410.

Pečiulytė, S.; Štikonas, A. 2008. On the generalized eigenfunctions system of the Sturm–Liouville problem. *Liet. mat. rink. LMD darbai* 48/49: 327–332.

Pečiulytė, S.; Štikonienė, O.; Štikonas, A. 2004. Apie vieno stacionariojo uždavinio su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga spektrą. *Liet. matem. rink.* 44(spec. nr.): 655–659.

Pečiulytė, S.; Štikonienė, O.; Štikonas, A. 2005. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *Mathematical Modelling and Analysis* 10(4): 377–392.

Pečiulytė, S.; Štikonienė, O.; Štikonas, A. 2008. Investigation of negative critical points of the characteristic function for problems with nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 13(4): 467–490.

Radzievski, G. 1996. Asymptotics of the eigenvalues of a regular boundary value problem. *Ukrainian Math. J.* 48(4): 537–575.

Ragulskis, K.; Sapagovas, M.; Čiupaila, R.; Jurkulinevičius, A. 1986. Numerical experiment in stacionary problems of liquid-metal contacts. *Vibrotechnika* 4(57): 105–111 (rusų kalba).

Sajavičius, S.; Sapagovas, M. 2009. Numerical analysis of the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral conditions. *Nonlinear analysis: modelling and control* 14(1): 115–122.

Samarskii, A. 2001. *The Theory of Difference Schemes*. New York Basel: Marcel Dekker, Inc.

Samarskii, A.; Gulin, A. 1973. *Stability of Difference Schemes*. Moscow, Nauka (rusų kalba).

Samarskii, A.; Gulin, A. 1989. *Numerical Methods*. Moscow, Nauka (rusų kalba).

Sapagovas, M. 2000. The boundary value problem with a nonlocal condition for a system of ordinary differential equations. *Diff. Equations* 36(7): 971–978 (rusų kalba).

Sapagovas, M. 2002b. The eigenvalues of some problem with a nonlocal condition. *Diff. Equations* 38(7): 1020–1026.

Sapagovas, M. 2002a. Hypothesis on the solvability of parabolic equations with nonlocal conditions. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 7(1): 93–104.

Sapagovas, M. 2005. On stability of finite–difference schemes for one–dimensional parabolic equations subject to integral conditions. *J. Comput. Appl. Math.* 92: 70–90.

Sapagovas, M. 2008. On the stability of a finite–difference scheme for nonlocal parabolic boundary–value problems. *Lithuanian mathematical journal* 48(3): 339–356.

Sapagovas, M. 1984. The numerical method for the solution of the problem on the equilibrium of a drop of liquid. *Comput. Math., Banach Center Publ.* 13: 45–59. PWN, Warsaw (rusų kalba).

Sapagovas, M. 1988. The solution of difference equations, arising from differential problem with integral condition. *Comput. Process and Systems, G. I. Marchul (Ed.)* 6: 245–253. Moscow, Nauka (rusų kalba).

Sapagovas, M. 2007. *Diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis*. Vilnius: Matematikos ir informatikos institutas.

Sapagovas, M.; Čiegis, R. 1987a. On some boundary problems with nonlocal conditions. *Diff. Equations* 23(7): 1268–1274 (rusų kalba).

Sapagovas, M.; Čiegis, R. 1987b. The numerical solution of some nonlocal problems. *Lithuanian J. Math.* 27(2): 348–356.

Sapagovas, M.; Štikonas, A. 2005. On the structure of the spectrum of a differential operator with a nonlocal condition. *Diff. Equations* 41(7): 1010–1018.

Sapagovas, M.; Štikonienė, O. 2009. A fourth–order alternating–direction method for difference schemes with nonlocal condition. *Lithuanian mathematical journal* 49(3): 309–317.

Sapagovas, M.; Kairytė, G.; Štikonienė, O.; Štikonas, A. 2007. Alternating direction method for a two–dimensional parabolic equation with a nonlocal boundary condition. *Mathematical Modelling and Analysis* 12(1): 131–142.

Schepper, H. D.; Keer, R. V. 1997. On a finite element method for second order elliptic eigenvalue problems with nonlocal dirichlet boundary conditions. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 18(3-4): 283–295.

Schepper, H. D.; Keer, R. V. 1998. On a variational approximation method for 2nd order eigenvalue problems in a multi-component domain with nonlocal dirichlet transition conditions. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 19(9-10): 971–994.

Schugerl, K. 1987. *Biorection engineering: reactions involving microorganisms and cells. Vol.1: Fundamentals, thermodinamics, formal kinetics, idealized reactor types and operation modes.* Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons Ltd.

Seo, S. 2000. Global existence and decreasing property of boundary values of solutions to parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Pacific Journal of Mathematics* 193(1): 219–226.

Shkalikov, A. 1982. Bases formed by eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions. *Vestnik Moskovsk. Universit. Ser. 1 Matem. Mechan.* 6: 12–21 (rusų kalba).

Skubachevski, A.; Steblov, G. 1991. On spectrum of differential operators with domain nondense in l_2. *Dokladi AN USSR* 321(6): 1158–1163.

Štikonas, A. . 2007. The Sturm–Liouville problem with a nonlocal boundary condition. *Lith. Math. J.* 47(3): 336–351.

Štikonas, A. .; Štikonienė, O. 2009. Characteristic functions for Sturm–Liouville problems with nonlocal boundary conditions. *Mathematical Modelling and Analysis* 14(2): 229–246.

Štikonas, A. .; Štikonienė, O.; Pečiulytė, S. 2003. Stacionarieji uždaviniai su įvairaus tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. *Liet. matem. rink.* 43(spec. nr.): 602–606.

Suboč, O. 2002. *Kai kurie uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis*: Daktaro disertacija. Matematikos ir informatikos institutas. Vilnius.

Sun, Y. 2004. Nontrivial solution for a three–point boundary–value problem. *Electronic Journal of Differential Equations* 2004(11): 1–10.

Sun, Z.-Z. 2001. A high–order difference scheme for a nonlocal boundary–value problem for the heat equation. *CMAM* 1(4): 398–414.

Varga, R. 1962. *Matrix iterative analysis*. Prentice-Hall.

Voevodin, V.; Kuznecov, Y. 1984. *Matricy i vychislenija*. Moscow (rusų kalba).

Wang, Y. 2002. Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition. *Electronic Journal of Differential Equations* 2002(5): 1–16.

Webb, J. 2001. Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory. *Nonlinear Analysis* 47: 4319–4332.

Webb, J. 2009. Nonlocal conjugate type boundary value problems of higher order. *Nonlinear Analysis* 71: 1933–1940.

Webb, J.; Infante, G. 2008. Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* 15: 45–67.

Wei, J. 2000. On a nonlocal eigenvalue problem and its applications to point–condensations in reaction–diffusion system. *Intern. J. Bifurc. Chaos* 10(6): 1485–1496.

Yin, Y. 1994. On nonlinear parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 185(1): 161–174.

Yurchuk, N. 1986. Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations. *Differents. Uravn.* 22(12): 2117–2126.

Zikirov, O. 2007. On boundary–value problem for hyperbolic–type equation of the third order. *Lith. Math. J.* 47(4): 484–495.

Autorės publikacijos disertacijos tema

Straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Čiupaila, R.; Jesevičiūtė, Ž.; Sapagovas, M. 2004. On the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral condition, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* **9**(2): 109–116. ISSN 1392-5113 (INSPEC, IndexCopernicus).

Jesevičiūtė, Ž. 2006. Diferencialinio operatoriaus su nelokaliąja integraline sąlyga spektro struktūra, *Matematika ir matematinis modeliavimas* **2**: 12–16. ISSN 1822-2757.

Jesevičiūtė, Ž. 2007. Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui su nelokaliąja integraline sąlyga, *Matematika ir matematinis modeliavimas* **3**: 22–26. ISSN 1822-2757.

Jesevičiūtė, Ž.; Sapagovas, M. 2008. On the stability of the finite-difference schemes for parabolic equations subject to integral conditions with applications for thermoelasticity, *Computational Methods in Applied Mathematics* **8**(4): 360–373. ISSN 1609-4840 (EBSCO Publishing, Mathematical Reviews).

Jachimavičienė, J.; Jesevičiūtė, Ž.; Sapagovas, M. 2009. The stability of finite-difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions, *Numerical Functional Analysis and Optimization* **30**(9–10): 988–1001. ISSN 0163-0563 (Thomson ISI Master Journal List).

Straipsniai kituose mokslo leidiniuose

Čiupaila, R.; Jesevičiūtė, Ž.; Sapagovas, M. 2003. *Eigenvalue problem for ordinary differential operator subject to integral condition*. Matematikos ir informatikos institutas: preprintas, 32. 7 p.

Jesevičiūtė, Ž. 2008. *On one eigenvalue problem for a differential operator with integral conditions*. Matematikos ir informatikos institutas: preprintas, 41. 9 p.

Jesevičiūtė, Ž. On one eigenvalue problem for a differential operator with integral conditions, in *Proceedings of International Conference "Differential equations and their applications (DETA-2009)*", 99–105. ISBN 978-9955-25-747-9.

Živilė JESEVIČIŪTĖ

TIKRINIŲ REIKŠMIŲ UŽDAVINYS DIFERENCIALINIAM OPERATORIUI SU NELOKALIOSIOMIS INTEGRALINĖMIS SĄLYGOMIS

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai,
matematika (01P)

Živilė JESEVIČIŪTĖ

THE EIGENVALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL OPERATOR WITH NONLOCAL INTEGRAL CONDITIONS

Doctoral Dissertation

Physical Sciences,
Mathematics (01P)

2010 01 15. 12,50 sp. l. Tiražas 20 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius,
http://leidykla.vgtu.lt
Spausdino UAB „Baltijos kopija“,
Kareivių g. 13B, 09109 Vilnius
http://www.kopija.lt