Vilniaus Universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas
Duomenų mokslo ir skaitmeninių tecnologijų institutas

Mifodijus Sapagovas

Skaičiavimo metodų moksliniai tyrimai Lietuvos Mokslų akademijos Fizikos ir matematikos institute (1961-1976)

Vilnius 2022

1. Įžanga

Lietuvos matematikos istorija skaičiuoja šimtus metų. Bet neskaitant kelių išimčių, iš esmės tai buvo tik matematikos dėstymo istorija. Tikri matematikos mokslo tyrimai Lietuvoje prasidėjo po antrojo pasaulinio karo. Pirmųjų matematikos mokslo daigų tenka ieškoti Vilniaus universitete Fizikos ir matematikos fakultete. 1945 m. šiame fakultete buvo priimti į aspirantūrą du matematikai. Vienas iš jų Jonas Kubilius (1921-2011) buvo nukreiptas į Leningrado (Sant Peterburgo) universitetą pas žymų matematiką Jurijų Liniką. J. Kubilius disertaciją "Kai kurie pirminių skaičių geometriniai tyrimai" apgynė 1951 m.. Kitas aspirantas Aronas Naftalevičius (1921-1999) ruošė disertaciją Maskvos universitete. 1952 m. jis apgynė disertaciją "Dvigubos skirtuminių lygčių sistemos".

Tolesni matematiniai tyrimai Lietuvoje susiję su J. Kubiliaus moksline ir organizacine veikla.

Lietuvos mokslų akademijoje 1956 m. spalio mėnesio 1d., reorganizuojant Fizikos – technikos institutą, buvo įkurtas Fizikos ir matematikos institutas. Instituto direktoriumi buvo fizikas teoretikas Adolfas Jucys, direktoriaus pavaduotoju – J. Kubilius. Institute buvo trys moksliniai padaliniai: Matematikos sektorius (vadovas J. Kubilius), Teorinės fizikos sektorius (vadovas A. Jucys) ir Puslaidininkių laboratorija (vadovas P. Brazdžiūnas).

Matematikos sektoriuje pradžioje buvo trys moksliniai darbuotojai: Jonas Kubilius, jo aspirantas Romas Uždavinys ir iš tremties grįžusi Ritė Merkytė. Kasmet į Matematikos sektorių buvo priimami nauji darbuotojai. Į sektorių grįžo Leningrado universiteto aspirantūrą baigę Vytautas Satulevičius (1957, tikimybių teorija) ir Vilius Matulis (1959, matematinė logika), bei Maskvos universiteto aspirantūrą baigęs Kęstutis Bulota (1957, skaičių teorija). Kasmet Matematikos sektorių papildydavo Vilniaus universiteto matematikos absolventai: Algirdas Mitalauskas (1957), Pranas Survila (1958), Eduardas Vilkas (1958), Leonardas Vilkauskas (1958), Bronius Riauba (1958), Bronius Kvedaras (1959), Gerutis Aleškevičius (1959), Bronius Grigelionis (1959), Aldona Aleškevičienė (1959), Liudvikas Stupulis (1959), Evaldas Gečiauskas (1960), Pranas Rumšas (1960).

1960 m. Matematikos sektoriui pradėjo vadovauti Vytautas Statulevičius. Tuo metu J. Kubilius jau buvo išrinktas Vilniaus universiteto rektoriumi.

Taigi, galima konstatuoti, kad praeito amžiaus šeštojo dešimtmečio pabaigoje Lietuvoje buvo pastebima matematikos mokslinių tyrimų plėtra. Būtent šiuo metu matematikos terminologijoje vis dažniau imta naudoti tokias sąvokas, kaip skaičiavimo matematika, skaitiniai metodai, artutiniai metodai, mašininė matematika ir kt., kitaip tariant, šeštojo dešimtmečio pabaigoje iki skaičiavimo metodų mokslinių tyrimų liko visai nedaug. Reikėjo pirmųjų šios krypties paruoštų specialistų.

2. Kaip Lietuvos Mokslų akademijoje atsirado skaičiavimo metodai

Šeštajame praeito amžiaus dešimtmetyje mokslo pasaulyje vis daugiau ir konkrečiau buvo kalbama ir rašoma apie elektronines skaičiavimo mašinas (ESM), dabartine terminologija, apie kompiuterius. Jonas Kubilius buvo vienas iš tų (gal pradžioje vos ne vienintelis), kurie Lietuvoje pradėjo aiškinti, kokios kompiuterių galimybės moksle ir kaip jie galėtų paskatinti ir praplėsti matematikos taikymus. 1956 m. Vilniaus universiteto konferencijoje jis skaitė pranešimą "Elektroninės skaičiavimo mašinos", po to parašė ir išleido brošiūrą šia tema (per "Žinijos" draugiją). Per keletą metų jis perskaitė apie ESM apie 100 populiarių paskaitų.

Mokslų akademijoje J. Kubilius, kiek vėliau ir V. Statulevičius, pradėjo rūpintis matematikos mokslo tyrimų plėtra, atsižvelgiant į tai, kokius naujus specialistų poreikius iškels ESM panaudojimas. Šio straipsnio autoriui, tada VU matematikos specialybės antrojo kurso studentui, 1957/58 m. tenka klausyti J. Kubiliaus fakultatyvinį "Matematinės logikos" kursą, skaitomą VU Fizikos ir matematikos fakultete, kurio dar nebuvo mokymo planuose. Buvo manoma, kad matematinė logika, diferencialinės lygtys ir skaičiavimo matematika yra tos matematikos šakos, kurių specialistų neturime, bet reikėtų, kad turėtume. Vėliau tai iš esmės pasitvirtino, nors sąrašas ir nėra pilnas.

1959 m. pavasario semestre VU trečio ir ketvirto kurso matematikos specialybės studentams buvo įvesta nauja specializacija – skaičiavimo matematika. Nors pati skaičiavimo matematikos sąvoka tuo metu dar nebuvo galutinai nusistovėjusi, o jos turinys dar formavosi, buvo teisingai suprantama, kad tai matematiškai suformuluotų uždavinių artutiniai (apytiksliai) sprendimo metodai, kurie naudojami sprendžiant uždavinį su ESM. Verta pastebėti, kad daug kur pasaulyje, kalbant apie ESM panaudojimą, dar ilgokai buvo manoma, kad jokių matematinių modelių ar metodų nereikia, ir kad bet kurį praktinį uždavinį galima iš karto išspręsti, turint supergalingą ESM.

1960 m. VU fizikos ir matematikos fakultete buvo įkurta Skaičiavimo matematikos katedra. Jos vedėjais buvo doc. G. Žilinkas (1960-1962), doc. P. Golokvosčius (1962-1967), doc. R. Uždavinys (1968-1973), doc. V. Merkys (1973-1980). 1980 m. katedra buvo pavadinta Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos katedra.

1961 m. VU baigė pirmoji skaičiavimo matematikos specializacijos absolventų laida, paruošta pagal pilną šios specializacijos programą. V. Statulevičiaus iniciatyva net devyni šios laidos absolventai buvo paskirti dirbti į Fizikos ir matematikos instituto Matematikos sektorių. Sektoriaus vadovas V. Statulevičius iš karto pradėjo rūpintis jaunųjų specialistų kvalifikacijos kėlimu. Trys iš jų, A. Pliuškevičienė, R. Pliuškevičius ir D. Sapagovienė buvo išsiųsti stažuotis į Leningradą pas žinomą matematinės logikos specialistą N. Šaniną. M. Sapagovas buvo priimtas į instituto aspirantūrą ir trims metams išvyko į Kijevą į Ukrainos MA Matematikos institutą pas diferencialinių lygčių skaitinių metodų specialistą doc. V. Šamanskį. I. Jačiauskas ir R. Jasilionis pradėjo ruoštis moksliniams tyrimams operacijų tyrimų ir lošimų teorijos srityje pas būsimą vadovą E. Vilką, kuris tuo metu dar mokėsi aspirantūroje Leningrade. Dar trys absolventės V. Bikelienė, R. Bražionytė ir J. Rimšaitė buvo nukreiptos darbui prie baigiamos įrengti ESM BESM-2. 1961m. rudenį į instituto aspirantūrą buvo priimtas B. Kvedaras, gavęs matematiko diplomą Maskvos universitete. Jis trims metams išvyko į Jaroslavskį pas vadovą prof. S. Kreiną.

1961 m. rudenį Fizikos ir matematikos institute buvo aktyviai ruošiamasi pirmosios Lietuvoje ESM BESM-2 darbo pradžiai. Šios pagal tą laikmetį, pakankamai galingos skaičiavimo mašinos, įsigijimu gana aktyviai rūpinosi instituto direktorius A. Jucys. ESM BESM-2 į Vilnių iš Uljanovsko gamyklos buvo atvežta (svoris apie 10 tonų) dar 1961 m. gegužę, tačiau darbus stabdė pastato parengimas. Pagaliau 1962 m. liepos mėnesio 14 d. valstybinė komisija priėmė pirmąją Lietuvoje didžiąją ESM. Tai buvo 14-oji tokio tipo ESM Sovietų Sąjungoje. Ta proga fizikos ir matematikos institute 1961 m. buvo įkurta Elektroninių skaičiavimo mašinų laboratorija. Kiek vėliau 1962 m. spalio 1d. buvo įkurtas Skaičiavimo matematikos sektorius, jo vadovu buvo paskirtas Vilius Matulis, neseniai apgynęs kandidatinę disertaciją iš matematinės logikos. Pagrindiniu ar vienu iš pagrindinių sektoriaus tikslu ir uždaviniu aritimiausiems keliems metams buvo programinės įrangos, reikalingos skaičiavimo mašinai BESM-4, sudarymas.

Skaičiavimo matematikos sektorius nebuvo skaičiavimo metodų mokslinio tyrimo padalinys. Daugelyje pasaulio šalių skaičiavimo centrų steigimo laikotarpiu, skaitiniai uždavinių sprendimo metodai ir ESM programinės įrangos kūrimas paprastai buvo priskiriami tai pačiai matematikos šakai. Dar viena, mano manymu, tinkanti tam laikotarpiui Sovietų Sąjungoje apibūdinti, savybė. Informatikos mokslo šeštame-septintame praeito amžiaus dešimtmetyje Sovietų Sąjungoje iš esmės dar nebuvo (arba ne taip vadinosi), kibernetika sunkiai ir lėtai kratėsi “Elzemokslo” etiketės. Tad tiesiog buvo patogu bent laikinai ESM programinę įrangą ir skaitinius metodus (numerical analysis) priskirti matematikos šakai – skaičiavimo matematikai.

Netrukus po Skaičiavimo matematikos sektoriaus įsteigimo 1962 m. Lietuvos MA Prezidiumas šiek-tiek pakeitė Fizikos ir matematikos instituto struktūrą. Nuo skaičiavimo matematikos sektoriaus atskilo naujas padalinys, kurio pavadinimas pakankamai gerai atspindėjo atliekamus darbus. Tai matematinės logikos ir programavimo sektorius (vadovas V. Matulis). Likęs skaičiavimo matematikos sektorius pavadinimo nepakeitė, bet jo tematika pasikeitė. Skaičiavimo matematikos sektoriaus tematika tapo operacijų tyrimo ir lošimų teorijos moksliniai tyrimai, o sektoriaus vadovu tapo E. Vilkas. Po kelerių metų buvo pakeistas ir sektoriaus pavadinimas – atsirado Operacijų tyrimo sektorius.

1967 m. sausio mėnesio 1d. Lietuvos MA fizikos ir matematikos institute įsteigtas pirmasis Lietuvoje Skaičiavimo centras. Šiame centre buvo du moksliniai padaliniai ir dvi laboratorijos. Vienu iš mokslinių padalinių buvo Skaičiavimo metodų sektorius (vadovas M. Sapagovas). Skaičiavimo metodų sektoriaus pagrindine mokslų tematika buvo diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai, įskaitant programinę įrangą. Dar viena veiklos kryptis, būdinga beveik visiems padaliniams – bendri darbai (dabar sakytume projektai) su kitomis mokslo ar gamybos įstaigomis ar įmonėmis, susiję su sektoriaus tematika.

Ir taip nuo 1967 m. sausio 1d. Lietuvos MA Fizikos ir matematikos institute įsteigtas mokslinis padalinys, kuriame

a) Atliekami moksliniai tyrimai diferencialinių lygčių skaitinių sprendimo metodų kryptyje,

b) Sudaroma ESM programinė įranga diferencialinėms lygtims spręsti,

c) Vykdomi bendri projektai su kitomis mokslo ir gamybos organizacijomis, sprendžiant konkrečius uždavinius, aprašomus diferencialinėmis lygtimis.

Taigi, 1967 metus galima laikyti skaičiavimo metodų mokslinių tyrimų pradžia Lietuvos MA Fizikos ir matematikos institute.

3. FMI Skaičiavimo metodų sektoriaus veikla. Pirmasis dešimtmetis

1967 m. sausio mėnesio 1d. Skaičiavimo metodų skyriuje buvo 9 darbuotojai, visi Vilniaus universiteto matematikos specialybės absolventai. Skliausteliuose nurodyti metai, kada buvo gautas VU diplomas ir pradėta dirbti Fizikos ir matematikos institute, kituose moksliniuose padaliniuose. Taigi pirmieji Skaičiavimo metodų sektoriaus darbuotojai:

1. Mifodijus Sapagovas (1961),
2. Dangutė Petrėnaitė Sapagovienė (1961),
3. Tautvyda Dacytė Ūdrienė (1962),
4. Danutė Puodžiūnaitė Burokienė (1962),
5. Aldona Šinkūnaitė Valiulienė (1962),
6. Miranda Deksnytė Daugvilienė (1963),
7. Gražina Zdanytė Stasinienė (1963),
8. Genutė Kairytė (1964),
9. Danutė Levinskaitė (1964).

Vienas sektoriaus darbuotojas (M. Sapagovas) buvo mokslų kandidatas. Kiti aštuoni, tiksliau, kitos aštuonios, pagal pareigas buvo matematikės programuotojos. Tai buvo gana populiari matematikos specialybės absolventų pareigybė, o jų darbo pobūdis buvo naujų ESM programų sudarymas ir praktinių uždavinių sprendimas, naudojant ESM.

Sutinkamai su Fizikos ir matematikos instituto tikslais (dabar sakytume su vizija ir misija) ir atsižvelgiant į sektoriaus darbuotojų kvalifikaciją bei tuometinius mokslinius – techninius poreikius Lietuvoje, buvo patikslintos ir patvirtintos šios pagrindinės sektoriaus darbų kryptys:

1. Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai,
2. Diferencialinių lygčių taikymai konkretiems mokslo bei projektavimo ir gamybos uždaviniams spręsti,
3. Programinės įrangos kūrimas

a) turimoms institute ESM,

b) kuriamoms Lietuvoje ESM (RŪTA 110, RŪTA 701).

Per pirmąjį dešimtmetį sektoriuje buvo vykdomos šios temos, kai kurios kartu su Diferencialinių lygčių sektoriumi (vadovas B. Kvedaras):

1. Kai kurių diferencialinių lygčių, aprašančių stacionarius ir nestacionarius fizikinius reiškinius ir procesus, kraštinių uždavinių tyrimas ir sprendimas (1967 - 1970).

2. Programavimo automatizavimas ESM BESM-4 algoritminių kalbų ir standartinių programų pagrindu (1970 - 1974).

3. Valdymo procesus aprašančių integro-diferencialinių lygčių tyrimas ir sprendimo metodai (1971 - 1974).

4. Efektyvių metodų sudarymas diferencialinėms lygtims spręsti (1974 - 1976).

5. Elipsinių lygčių ir jų sistemų artutiniai sprendimo metodai (1975 - 1976).

Analizuojant ir vertinant ne gautus rezultatus, o mokslinių tyrimų tematiką per pirmąjį dešimtmetį, reikia atkreipti dėmesį į vieną gana specifinį mokslinio planavimo bruožą. Pagal tuo metu buvusią tvarką, mokslinio planavimo klausimu reikia prisilaikyti tam tikrų reikalavimų bei nurodymų, ateinančių iš Maskvos, iš SSRS Mokslų akademijos. Pavyzdžiui, planuojant mokslinių temų pavadinimai turėjo būti suformuluoti taip, kad jas galima būtų priskirti tam tikroms “globalioms” problemoms, turinčioms savo pavadinimuose tokius žodžius, kaip valdymas, optimizavimas, automatizavimas ir pan.. Todėl kartai matematinių temų pavadinimai būdavo dirbtinai šiek-tiek iškreipti. Tačiau iš tikrųjų šitokie reikalavimai buvo formalūs, jie būdavo reikalingi tik planavimui ir ataskaitoms, jie nevaržė mokslinių tyrimų turinio.

Moksliniai tyrimai Skaičiavimo metodų sektoriuje nuo pirmųjų metų buvo vykdomi bendradarbiaujant su Lietuvos aukštosiomis mokyklomis bei SSRS universitetais ir mokslo institutais. Kartu su SSSR MA Sibiro skyriaus Skaičiavimo centru Fizikos ir matematikos institutas organizavo 1971 m. Trakuose II visasąjunginę konferenciją “Tamprumo ir plastiškumo teorijos uždavinių skaitiniai sprendimo metodai”. Dalykiniai moksliniai tyrimai siejo sektoriaus mokslininkus su SSSR MA Taikomosios matematikos instituto (akad. A. Samarskis, prof. J. Popovas, prof. S. Kurdiumovas), Leningrado universiteto Matematinės fizikos laboratorijos (prof. N. Morozovas, m. kand. V. Rivkindas), Baltarusijos MA Matematikos instituto (prof. A. Abrašinas) ir k t. mokslininkais.

Kartu su FMI Diferencialinių lygčių sektoriumi (vadovas B. Kvedaras) Skaičiavimo metodų sektorius 1971 m. pradėjo leisti mokslo darbų rinkinį “Diferencialinės lygtys ir jų taikymas”, kuris oficialiai pristatomas kaip respublikinio to paties pavadinimo mokslinio seminaro darbai (redaktoriai B. Kvedaras ir M. Sapagovas). Per šešis metus (1971 - 1976) buvo išleista 16 leidinių. Sraipsniai buvo spausdinami rusų kalba. Leidinys buvo referuojamas dviejuose referatyviniuose žurnaluose (anglų ir rusų kalbomis).

Maždaug nuo 1958 metų ar šiek-tiek vėliau keliose Lietuvos aukštosiose mokyklose pradėtas dėstyti skaičiavimo matematikos kursas. Lietuvoje tuo metu nebuvo šio kurso vadovėlių ar mokymo priemonių lietuvių kalba. Vytautas Statulevičius (dabar jau akademikas, FMI direktorius) ėmėsi iniciatyvos ir susitarė su "Minties" leidykla išleisti originalų skaičiavimo matematikos vadovėlį lietuvių kalba. 1974 m. 6000 egzempliorių tiražu "Minties" leidykloje buvo išleistas B. Kvedaro, M. Sapagovo vadovėlis "Skaičiavimo matematika".

Nors ir palyginti lėtais tempais Skaičiavimo metodų darbuotojų mokslinių tyrimų rezultatai buvo vis labiau matomi ir už Lietuvos ribų. Tam teigiamos įtakos turėjo taip pat ir M. Sapagovo 4 mėnesių stažuotė Didžiosios Britanijos universitetuose (Oxford, Dundee, Glasgow, London Imperial College). Ir dar – sektoriaus darbuotojai pradėjo ginti mokslo kandidato disertacijas.

Per pirmąjį Skaičiavimo metodų sektoriaus dešimtmetį du sektoriaus darbuotojai apgynė disertacijas. Vytautas Kleiza apgynė disertaciją "Netiesinių lygčių sprendimas Monte-Karlo metodu" (vadovas M. Sapagovas) Leningrade 1973 m. . Dangutė Sapagovienė apgynė disertaciją "Tikrinių reikšmių uždavinio elipsiniam operatoriui sprendimas baigtinių skirtumų metodu" (vadovas B. Kvedaras) Minske 1976m. (tuo metu ji jau dirbo diferencialinių lygčių sektoriuje). R. Skirmantas buvo sektoriaus aspirantas.

Kaip ir Fizikos ir matematikos institute, Skaitinių metodų moksliniai tyrimai prasidėjo ir Vilniaus universitete. Kaip jau minėta, nuo 1958 m., VU matematikos specialybės studentams skaitomas skaičiavimo metodų kursas. Pirmuoju absolventu, susidomėjusiu skaičiavimo metodų moksliniais tyrimais, buvo Ignacas Stasys Uždavinys, baigęs VU 1958 m.. Pradžioje jis vedė studentams praktinius užsiėmimus ir seminarus pagal skaičiavimo matematikos programą, tobulinosi Maskvos ir Minsko universitetuose. Mokslinėse konferencijose ir seminaruose skaitė pranešimus integralų skaičiavimo ir integralinių lygčių sprendimo skaitiniais metodais klausimais. Paskui perėjo į administracinį darbą, daug metų vadovavo VU Skaičiavimo centrui ir nuo aktyvių mokslinių tyrimų nutolo.

Danutė Kaušylaitė Raškinienė, pradėjusi studijuoti matematiką Vilniaus universitete, 1968 m. baigė Maskvos universitetą. 1971 m. apgynė disertaciją Maskvoje. Dėstė VU Kauno vakariniame fakultete, vėliau Lietuvos žemės ūkio akademijoje.

Skaičiavimo metodų mokslinisi tyrimai Vilniaus universitete smarkiai suintensyvėjo po to, kai baigę aspirantūrą į Vilnių grįžo Feliksas Ivanauskas (apgynė disertaciją 1974m.) ir Arūnas Štaras (apgynė disertaciją 1978m.).

4. Pagrindiniai mokslinių tyrimų rezultatai

Šiame skyriuje pateikiame svarbesnių mokslinių tyrimų rezultatų, gautų FMI Skaičiavimo metodų sektoriuje 1967 – 1976 m., apžvalga. Iki 1967 metų mokslinių publikacijų turėjo tik vienas sektoriaus darbuotojas (M. Sapagovas). Praėjus 50 metų, įdomu ir naudinga pažvelgti į tuos rezultatus šių dienų požiūriu.

4.1. Padidinto tikslumo skirtuminės schemos netiesinėms diferencialinėms lygtims.

M. Sapagovo kandidatinėje disertacijoje tyrimo objektu buvo netiesinė (kartais ją vadiname kvazitiesine) elipsinė lygtis

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_i\big(x,u,p_j\big)\Big) - a_0(x,u,p_j) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{1}$$

kurioje $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Pagrindinė prielaida teoriškai nagrinėjant šią lygtį su kraštine sąlyga $u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ yra nelygybės

$$\alpha \sum_{i=0}^{m} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=0}^{m} \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i \xi_j \le \beta \sum_{i=0}^{m} \xi_i^2 , \tag{2}$$

kurios turi būti išpildyto visoms u, p_j reikšmėms. Čia $\alpha > 0$, $\beta < \infty$. Tai tolygaus monotoniškumo sąlyga. Atvejis $\alpha \ge 0$ priskiriamas netolygiam monotoniškumui arba netolygiam elipsiškumui.

Vienas svarbiausių iki 1967 m. gautų rezultatų yra skirtuminių lygčių sistemos

$$\Lambda(u_h) = f_h, \tag{3}$$

aproksimuojančios kraštinį uždavinį lygčiai (1), iteracinių metodų

$$Bu_h^n = Bu_h^{n-1} - \lambda\Big(\Lambda\big(u_h^{n-1}\big) - f_h\Big) \tag{4}$$

konvergavimo sąlygų tyrimas. Čia B yra teigiamai apibrėžta matrica, λ - parametras.

Tęsiant šiuos tyrimus, Skaičiavimo metodų sektoriuje buvo pradėta nagrinėti padidinto tikslumo skirtuminės schemos. Viena iš galimybių, kaip sudaryti ir teoriškai pagrįsti padidinto tikslumo skirtumines schemas netiesinėms diferencialinėms lygtims yra pseudoišsprendžiamos skirtuminės schemos sąvokos panaudojimas. Šios sąvokos prasmė yra tokia, kad diferencialinei lygčiai (1) su kraštine sąlyga egzistuoja konverguojantis iteracinis metodas, analogiškas iteraciniam metodui (4)

$$B_1 u^n = B_1 u^{n-1} - \lambda\left(A(u^{n-1}) - f\right), \tag{5}$$

kuriame B_1 yra teigiamai apibrėžtas operatorius, pavyzdžiui:

$$B_1 u = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}. \tag{6}$$

Užrašykime dabar $O(h^4)$ eilės tikslumo skirtuminę schemą ne lygčiai (1), o tiesinei lygčiai (5), t.y. lygčiai

$$B_1 u^n = B_1 u^{n-1} - \lambda \Phi(u^{n-1}). \tag{7}$$

Gausime skirtuminę lygčių sistemą

$$\Lambda_1 u_h{}^n = \Lambda_1 u_h{}^{n-1} - \lambda \Phi_h(u_h{}^{n-1}). \tag{8}$$

Formaliai skirtuminių lygčių sistema

$$\Phi_h(u_h) = 0 \tag{9}$$

yra tam tikra diferencialinės lygties (1) skirtuminė aukštos $O(h^4)$ eilės aproksimacija. Tačiau dabar nenagrinėjame, ar skirtuminių lygčių sistema (9) turi vienintelį sprendinį, ar iteracinis metodas (8) konverguoja. Dabar tikslas yra gauti įvertį bet kuriam iš anksto pasirinktam $\varepsilon > 0$.

$$\left\|u_h^n - u^*\right\| \le \left\|u_h^n - u^n\right\| + \left\|u^n - u^*\right\| \le \varepsilon; \tag{10}$$

čia u^* - tikslus diferencialinio uždavinio sprendinys.

Įrodyta, kokioms sąlygoms esant, sprendžiant tiesinių lygčių sistemą (7), egzistuoja skaičius n_1 toks, kad visiems $n > n_1$ yra teisingas įvertis

$$\varepsilon \le Ch^4 + \alpha_{n_1} \tag{11}$$

kuriame C yra konstanta, nepriklausanti nuo h ir n; $\alpha_n \to 0$, kai $n \to \infty$ nepriklausomai nuo h.

Šie teoriniai teiginiai buvo taikomi elipsinei lygčiai

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{12}$$

aprašančiai magnetinio lauko potencialą netiesinėse terpėse, čia

$$T^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{13}$$

Funkcijos $\mu(T^2)$ savybės tokio, kad lygtis (12) nėra tolygiai elipsinė, t.y. nelygybėse (2) turime $\alpha \geq 0$. Kai srityje, kurioje sprendžiama magnetinio potencialo lygtis yra feromagnetikų, tai dviejų skirtingų terpių skiriamajame kontūre S yra išpildytos suderinamumo sąlygos

$$[u]_S = 0, \quad \left[\mu\left(T^2\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S = 0. \tag{14}$$

Įdomu pastebėti, kad M. Sapagovo disertacinio darbo vadovas, parinkdamas disertacijos temą, pagrindiniu turinio objektu įvardijo būtent magnetinio potencialo lygtį (12). Tačiau nesant realaus užsakovo, taip ir nebuvo magnetinio potencialo lygtis realiai pritaikyta konkrečiam uždaviniui nei aspirantūros laikotarpiu, nei po to. Tačiau lygties (12) kita interpretacija buvo detaliai išnagrinėta (žr. Skyrelį 4.).

Aprašytas padidinto tikslumo skirtuminis metodas apibendrintas kitiems uždaviniams spręsti (kvazitiesinės parabolinės lygtys, trečio tipo kraštinės sąlygos, netolygus tinklelis).

Tačiau toks baigtinių skirtumų metodo variantas didesnio susidomėjimo nesusilaukė, ir kiek dabar žinoma, kitose mokslo įstaigose nebuvo nagrinėjamas.

Literatūra: [30; 38, 39, 40, 54, 59, 69].

4.2. Variaciniai – skirtuminai netiesinių diferencialinių lygčių sprendimo metodai.

Antra galimybė sudaryti padidinto tikslumo skirtuminius metodus netiesinėms elipsinėms lygtims yra variaciniai – skirtuminiai metodai. Įdomu pastebėti, kad skirtingai vadinami bei interpretuojami variaciniai skirtuminiai metodai, nagrinėjami Vakarų pasaulyje, praeito amžiaus šeštame – septintame dešimtmetyje Sovietų Sąjungos matematinėje bendruomenėje sunkiai skynėsi sau kelią ir buvo nepripažįstami kaip baigtinių skirtumų metodo alternatyva. Vieni iš pirmųjų variacinių – skirtuminių metodų propaguotojų Sovietų Sąjungoje Leningrado matematikai: L. Oganesian, V. Rivkind, L. Ruchovec parašę rimtą darbą (monografiją) rusų kalba apie variacinius – skirtuminius metodus, ilgai neturėjo kur jo atspausdinti. Kai šis jų darbas buvo atspausdintas Lietuvoje „Diferencialinės lygtys ir jų taikymas“ rinkinyje (1973 m. leidinys 5 ir 1975 m. leidinys 8) kaip dviejų dalių mokslinis straipsnis, jauniems Skaičiavimo metodų sektoriaus darbuotojams susidarė geros sąlygos stažuotis ar konsultuotis Leningrade ir gauti iš Leningrado matematikų konkrečias užduotis moksliniams tyrimams. Tokia buvo realybė. Maždaug tuo pat metu, t.y. aštuntojo dešimtmečio pradžioje, variaciniai – skirtuminiai metodai aktyviai pradėti nagrinėti Novosibirske MA Sibiro skyriuje. Novosibirske 1973 m.

atspausdintas M. Sapagovo straipsnis apie padidinto tikslumo variacinius – skirtuminius metodus netiesinėms lygtims spręsti. Šiame straipsnyje, sekant R. Varga ir D. Greenspan, sukonstruotos variacinių – skirtuminių metodų schemos (Galiorkino metodas). Sudaryti algoritmai, kaip spręsti šiuo metodu lygtį (1), norint gauti apytikslį sprendinį su iš anksto pasirinkta paklaida ε.

Literatūra: [39, 66].

4.3. Variacinės nelygybės ir Signorini uždavinys. Bendradarbiaujant su Leningrado universiteto Matematinės fizikos laboratorijos mokslininkais buvo sprendžiamas elipsinių lygčių uždavinys vadinamas Signorini uždaviniu.

Apibrėžkime bitiesinę formą:

$$B(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{15}$$

ir

$$F(u) = \sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega} uf_i dx\,; \tag{16}$$

čia u, $v \in$ V, V - duota funkcijų erdvė, Ω - sritis m-ėje ardvėje.

Signorini uždavinys apibrėžiamas taip: rasti funkciją $u_0 \in V$ tokią, kad su duotąja funkcijas $v \in V$ būtų išpildyta nelygybė

$$2B(u,v-u) - F(v-u) \geq 0\,. \tag{17}$$

Tarkime, kad yra teisinga prielaida (tolygaus elipsiškumo sąlyga):

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\,, \quad \alpha > 0\,. \tag{18}$$

Pastebėkime, kad Signorini uždavinio sprendinys u_0 minimizuoja funkcionalą

$$J(v) = 2B(u,v) - F(v)\,. \tag{19}$$

Ir atvirkščiai, funkcija, minimizuojanti funkcionalo $J(u)$ reikšmę erdvėje V, yra Signorini uždavinio sprendinys.

Z. Vasiliauskas įrodė, kad esant tam tikroms sąlygoms variaciniu skirtuminiu metodu galima surasti funkcijų seką, silpnai konverguojančią į $u_0 \in W_2^1$. Kraštinių sąlygų eliminavimui naudojamas baudų metodas.

Literatūra: [61].

4.4. Netiesinių lygčių sistemų sprendimas Monte – Karlo metodu. Skaičiavimo metodų sektoriuje pagrindiniu mokslinių tyrimų objektu yra kraštiniai uždaviniai netiesinėms elipsinėms lygtims, kurie sprendžiami baigtinių skirtumų metodu. Taip diferencialinės lygties sprendimas yra suvedamas į netiesinių algebrinių lygčių sistemų sprendimą.

Paprastai tokios sistemos sprendžiamos iteraciniais metodais. O Fizikos ir matematikos institute jau buvo susiformavusi stipri tikimybių teorijos grupė. Todėl gana natūraliai atsirado nauja tema: netiesinių skirtuminių lygčių sistemų sprendimas statistiniu Monte-Karlo metodu. Monte-Karlo metodą galima interpretuoti taip: tai skaičiavimo matematikos metodas, kurio esmė yra atsitiktinių dydžių modeliavimas tikslu gauti (apskaičiuoti) atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijos charakteristikas.

Tokį uždavinį 1969 m. pradėjo nagrinėti VU matematikos specialybės absolventas Vytautas Kleiza. 1973 m. jis apgynė mokslų kandidato disertaciją tema „Netiesinių lygčių sprendimas Monte-Karlo metodu".

Pirmiausia jis įrodė principinį teiginį, kad modeliuojant atsitiktinius dydžius, pasiskirsčiusius pagal specialų dėsnį, galima rasti netiesinių skirtuminių lygčių sistemos aproksimuojančios lygties (12) sprendinį. Analizuojant metodo savybes, gauta keletas svarbių išvadų. Pirma iš skaičiavimo rezultatų galima gauti aposteriorinę informaciją, ar lygčių sistema turi vienintelį sprendinį ar keletą sprendinių. Antra, kai sprendinys nėra vienintelis, galima modifikuoti metodą taip, kad galima būtų lokalizuoti atskirus sprendinius. Trečia, buvo suformuoti sprendinio vienatinumo kriterijai. Ketvirta, ištirta metodo paklaidos struktūra. Įrodyta, kad paklaida susideda iš dviejų dedamųjų: deterministinės ir statistinės. Surastos būtinosios ir pakankamosios sąlygos, kada paklaidoje nėra deterministinės dedamosios.

Išnagrinėta keletas Monte-Karlo metodo procedūrų apibendrinimų kitiems matematinės analizės uždaviniams spręsti:

- Atvirkštinės funkcijos radimas,
- Netiesinių lygčių sistemų sprendinio funkcionalų skaičiavimas.

Literatūra: [27, 28, 29, 33, 44, 45, 46, 52, 62, 65, 67].

4.5. Minimalaus paviršiaus lygties sprendimas. Iš daugelio kvazitiesinių elipsinių lygčių, kurių sprendimo metodai nagrinėjami Skaičiavimo metodų sektoriuje, ypatingą vietą užima minimalaus paviršiaus lygtis

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \tag{20}$$

kurioje

$$T^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{21}$$

$$\mu(T^2)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2}}. \tag{22}$$

Ši lygtis įvairiais aspektais nagrinėjama diferencialinių lygčių teorijoje, kompleksinio kintamojo funkcijų teorijoje, geometrijoje, variaciniame skaičiavime. Maždaug prieš 50 metų ši lygtis tapo populiariu objektu skaičiavimo matematikoje.

Galima nurodyti keletą lengvai matomų sunkumų, su kuriais susiduriame spręsdami šią lygtį skaitiniais metodais.

Spręskime šią lygtį su kraštine sąlyga baigtinių skirtumų metodu. Pirma, aproksimuojant šią lygtį taške (i,j) skirtumais, reikia naudoti tinklo šabloną ne 5, o 7 taškuose $(i\pm1,j)$, $(i,j\pm1)$, (i,j), $(i+1,j-1)$, $(i-1,j+1)$. Jei sritis, kurioje sprendžiame lygtį, yra su kreivalinijiniu kontūru (ne stačiakampė), susiduriame su techniniais sunkumais nustatydami ar taškai $(i+1,j-1)$ ir $(i-1,j+1)$ yra srities viduje ar išorėje.

Antra daug svarbesnė savybė. Iš $\mu(T^2)$ išraiškos seka, kad nelygybėse (2) turime ne $\alpha>0$, o tik $\alpha\geq0$. Tai iš esmės apsunkina iteracinių metodų konvergavimo tyrimą. Viena iš būtinų sąlygų tam, kad iteraciniai metodai skirtuminių lygčių sistemai konverguotų yra apriorinis įvertis

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\leq M<\infty. \tag{23}$$

Sprendžiant minimalaus paviršiaus lygtį baigtinių skirtumų metodu įrodyta, kada apriorinio įverčio diferencialiniam uždaviniui (23) pakanka, kad konverguotų iteracinis metodas skirtuminių lygčių sistemai.

Vienas iš efektyvių būdų spręsti minimalaus paviršiaus lygtį yra naujo tarpinio uždavinio sprendimas. Būtent tarkime, kad skirtuminių lygčių sistemai yra teisingas apriorinis įvertis

$$\left(T_{ij}\right)^2 \equiv \left(\delta_x u_{ij}\right)^2 + \left(\delta_y u_{ij}\right)^2 \le M_2\,; \tag{24}$$

čia vietoje išvestinių yra parašyti pirmieji skirtumai. Sudarykime tarpinį uždavinį, kuriame vietoje $\mu(T^2)$ yra paimta $\tilde{\mu}(T^2)$:

$$\tilde{\mu}(T^2) = \begin{cases} \mu(T^2), & \text{jei } \; T_{ij}^2 < M_2 \\ \mu(M_2), & \text{jei } \; T_{ij}^2 \ge M_2 \end{cases}. \tag{25}$$

Sprendžiant tarpinį uždavinį su funkcija $\tilde{\mu}(T^2)$ išvengiame neapibrėžtumų kai T^2 yra pakankamai dideli skaičiai.

Teoriniai minimalaus paviršiaus lygties tyrimai buvo papildyti gana didelės apimties realių uždavinių sprendimu (žr. Skyrelį 5.3).

4.6. Tikrinių reikšmių uždavinys diferencialiniam operatoriui. Diferencialinių operatorių tikrinių reikšmių teoriniai tyrimai ir šių rezultatų taikymai konkretiems uždaviniams spręsti skaičiavimo metodų sektoriuje prasidėjo nuo pirmųjų sektoriaus įsteigimo metų. Tipinis ir vienas paprasčiausių uždavinio formulavimų yra toks.

Reikia rasti tokius skaičius λ (tikrinės reikšmės), su kuriais diferencialinis uždavinys

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in \Omega\,, \tag{26}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{27}$$

turi netrivialų sprendinį $u(x, y) \not\equiv 0$. Čia $\partial\Omega$ yra srities Ω kontūras. Sprendžiant šį uždavinį baigtinių skirtumų metodu, yra patogu priimti prielaidą, kad sritis Ω yra sudaryta iš stačiakampių. Tada, padengus sritį stačiakampiu tinklu ir pakeičiant antrąsias išvestines atitinkamais skirtumais tikslumu $O(h^2)$, vietoje diferencialinio tikrinių reikšmių uždavinio (26), (27) gauname matricos tikrinių reikšmių uždavinį

$$Au_h = \lambda u_h \tag{28}$$

su simetrine teigiamai apibrėžta matrica A.

Skaičiavimo metodų sektoriuje uždavinys (26), (27) buvo sprendžiamas taikant padidinto tikslumo $O(h^4)$ or $O(h^6)$ baigtinių skirtumų metodą. Rezultatai buvo apibendrinti sudėtingesniems diferencialiniams operatoriams ir nestačiakampėms sritims Ω.

Viename pirmųjų D. Sapagovienės straipsnių, taikant $O(h^4)$ eilės aproksimaciją, diferencialinis tikrinių reikšmių uždavinys (26), (27) suvedamas į apibendrintą matricinį tikrinių reikšmių uždavinį

$$Au_h = \lambda_h Bu_h, \tag{29}$$

kuriame A ir B yra simetrinės matricos, be to, B - teigiamai apibrėžta. Išnagrinėtos keturios (29) pavidalo skirtuminės schemos su skirtingomis matricomis A ir B. Visais atvejais įrodyta, kad teisingas toks įvertis.

$$\left|\lambda_h^i - \lambda^i\right| \le Ch^4; \tag{30}$$

čia λ^i - diferencialinio uždavinio tikrinė reikšmė, λ_h^i - skirtuminio uždavinio (28) tikrinė reikšmė, $i = 1, 2, ..., N$; N - matricų A ir B eilė. C yra konstanta, priklausanti nuo u_h^i ir λ^i, bet nepriklausanti nuo h. Šis rezultatas buvo apibendrintas tikrinių reikšmių uždaviniui, kuriame vietoje (26) lygties yra lygtis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, \tag{31}$$

kai $|a| < 1$. Tačiau taikant $O(h^4)$ apriksimaciją lygčiai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda \rho(x, y)u = 0, \quad \rho(x, y) > 0 \tag{32}$$

su kraštine sąlyga (27), skirtuminės schemos pavidalas (29) nėra tinkamas. Šiuo atveju matricų apibendrintame tikrinių reikšmių uždavinyje (29) matrica B nėra simetrinė. O tai reiškia, kad skirtuminio uždavinio (29) tikrinės reikšmės gali būti neigiamos ar kompleksinės, kai diferencialinio uždavinio visos tikrinės reikšmės yra tik teigiamos.

Todėl diferencialiniam tikrinių reikšmių uždaviniui (32), (27) naudojama kitokia $O(h^4)$ aproksimacija.

Šiuo atveju skirtuminis uždavinys užrašomas kaip netiesinis algebrinis tikrinių reikšmių uždavinys

$$\lambda_h^2 Au_h + \lambda_h Bu_h - Cu_h = 0, \tag{33}$$

kuriame A, B ir C simetrinės matricos, be to matrices A ir C yra teigiamai apibrėžtos matricos. Tikrinių reikšmių paklaida įvertinama pagal formulę (30).

Netiesinis tikrinių reikšmių uždavinys (33) gaunamas ir tuo atveju, kai diferencialinis uždavinys (26), (27) aprosimuojamas $O(h^6)$ eilės baigtinių skirtumų metodu.

Pastebėsime, kad jeigu A, B ir C yra N-osios eilės matricos, tai netiesinis tikrinių reikšmių uždavinys (33) turi $2N$ tikrinių reikšmių. Įrodyta, kad nagrinėjamam uždaviniui visos $2N$ tikrinės reikšmės yra realios, iš jų N yra neigiamos ir N teigiamos. Teigiamosios tikrinės reikšmės yra diferencialinio tikrinių reikšmių uždavinio tikrinių reikšmių λ^i apytikslės išraiškos.

Sudarytas algoritmas netiesinio algebrinio tikrinių reikšmių uždavinio tikrinėms reikšmėms rasti. Įrodyta, kad netiesinis tikrinių reikmių uždavinys (33) yra stabilus. Algoritmo pagrindu yra apibendrintas kvadratinės šaknies metodas. Įrodyta, kad skaičiuojant pagal šį algoritmą daugianario

$$\det\left(\lambda_h^2 A + \lambda_h B - C\right) = 0 \tag{34}$$

šaknis λ_h, iš tarpinių skaičiavimų rezultatų galima sudaryti Šturmo grandinę, kitaip tariant, galima sužinoti, kiek tikrinių reikšmių yra pasirinktame intervale ir sudaryt intervalus, kuriuose egzistuoja tik viena tikrinė reikšmė.

Naudojant skirtuminio uždavinio (33) pavidalą, minėti rezultatai apibendrinti elipsinei lygčiai su kintamais koeficientais

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda\rho(x,y) = 0\,, \tag{35}$$

kai $p(x,y) \geq p_0 > 0$, $\rho(x,y) \geq \rho_0 > 0$.

Ir dar vienas gana įdomus rezultatas buvo gautas lygčiai (26) nestačiakampėse srityse Ω. Skirtuminiam uždaviniui užrašyti srityje Ω su kreivalinijiniu kontūru $\partial\Omega$, pasinaudota teoriniu teiginiu iš kompleksinio kintamojo funkcijų konforminio atvaizdavimo teorijos.

Taigi, pirmiausia rašome ne diferencialinio uždavinio aproksimaciją srityje Ω, o užrašoma srities Ω konforminį atvaizdavimą į stačiakampį (jei tai nėra per daug sudėtinga). Tarkim, kad konforminis atvaizdavimas srities Ω į stačiakampį nusakomas formule

$$\zeta = \varphi(z)\,, \tag{36}$$

kurioje $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$. Atlikus konforminį atvaizdavimą (36), lygtis (26) tampa tokia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2} \lambda u = 0 \qquad (37)$$

Stačiakampėje srityje s. Gavome jau išnagrinėtą atvejį (32). Tokiu metodu buvo išspręstas uždavinys (26), (27) su trimis srities Ω pavidalais (žr. 5.2).

Literatūra [2, 22, 23, 25, 31, 41, 42, 68, 70].

5. Diferencialinių lygčių taikymai

Skaičiavimo metodų sektoriuje nuo pat pirmųjų įsteigimo metų pastoviai buvo sprendžiami konkretūs uždaviniai, aprašomi diferencialinėmis lygtimis. Paprastai tai buvo arba kitų organizacijų ar įmonių užsakymai (ūkiskaitinės sutartys) arba mokslinis bendradarbiavimas su kitomis mokslinėmis institucijomis. Verta pastebėti, kad pradėjus naudoti ESM, daugelis mokslo ir projektavimo institucijų pradėjo naudoti sudėtingesnius matematinius modelius. Neretai buvo manoma, kad palyginti galingos ESM pačios išspręs sudėtingus matematinius uždavinius. Bet paprastai naujiems matematiniams uždaviniams spręsti reikėdavo kvalifikuotos matematikų pagalbos, ypač parenkant ar sukuriant tinkamus skaičiavimo metodus. Taip skaičiavimo metodų sektorius kas met susilaukdavo naujų užsakovų ar partnerių su naujais uždaviniais.

Šiame skyriuje trumpai aprašomi ir komentuojami svarbesni sektoriuje spręsti matematiniai uždaviniai, kurie formuluojami naudojant diferencialines lygtis. Nors ir ne visada, bet pasitaikydavo, kad kai kurie uždaviniai buvo tiesiogiai susiję su sektoriaus tematika (pvz. Minimalaus paviršiaus lygtis). Dar daugiau, uždavinys, aprašytas skyriuje 5.9, turėjo įtakos būsimai Skaičiavimo metodų sektoriaus tematikai.

5.1.Požeminių vandens eksploatacinių atsargų įvertinimas ir jų dinamikos procesų prognozavimas. Faktiškai tai buvo pirmoji Fizikos ir matematikos instituto ūkiskaitinė sutartis diferencialinių lygčių taikymo tematika. Ji buvo pasirašyta ir vykdyta 1967 metais su SSSR Geologijos ministerijos Geologijos institutu (Vilnius). Dvejus metus darbai buvo vykdomi kartu su FMI Diferencialinių lygčių sektoriumi (B. Kvedaras, O. Dulkytė).

Matematiniu požiūriu buvo sprendžiama baigtinių skirtumų metodu nestacionari diferencialinė filtracijos vandeningame sluoksnyje lygtis, naudojant hidrogeologų turimus realius duomenis. Kad galima būtų bent iš principo atsakyti į klausimą apie iš skaičiavimų gautos prognozės tikslumą, pirmame etape buvo papildomai suformuluotas uždavinys, kurio atsakymą buvo galima palyginti su realia situacija. Būtent, kiek, eksplotuojant Šiaulių vandenvietę, nukris vandens lygis aplinkinių miestų ir gyvenviečių gręžiniuose.

Antrame etape, kurį finansavo SSSR Mokslo ir technikos komitetas, pagal skaičiavimų rezultatus buvo sudaromi respublikos hidrogeologiniai žemėlapiai.

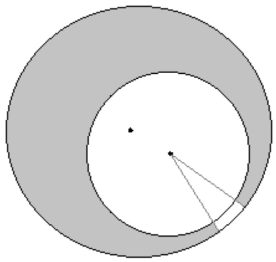
Nuo 1969 m. šiuos darbus tęsė tik Diferencialinių lygčių sektorius. Po kelių darbo metų D. Dulkytė parašė ir apgynė kandidato disertaciją hidrogeologine tematika.

5.2.Biharmoninė lygtis ir statybinių konstrukcijų atsparumas. 1967 metais Skaičiavimo metodų sektoriuje pradėtas spręsti dar vienas diferencialinių lygčių taikymo uždavinys. Tai statybinių konstrukcijų atsparumo ir medžiagų irimo procesų tyrimo uždavinys. Kartu su Kauno Politechnikos instituto (dabar KTU) Šiaulių filialo ir Panevėžio vakarinio fakulteto darbuotojais (V. Keras, A. Andrėnas, A. Šuminas) buvo vykdomi bendri moksliniai tyrimai. Matematiniu požiūriu buvo sprendžiama baigtinių skirtumų metodu biharmoninė lygtis (ketvirtos eilės tiesinė elipsinė lygtis su pastoviais koeficientais). Skirtuminių lygčių sistemai spręsti naudotas blokinis iteracinis metodas. Naudojant ESM BESM-2M buvo skaičiuojami įtempiniai konstrukcijose, keičiant apkrovas (kraštines sąlygas).

Literatūra: [11, 12, 14, 16, 17, 18, 76].

5.3.Procesų bangolaidžiuose tyrimas ir bangolaidžių optimalių parametrų parinkimas. Matematine prasme tai vienas iš sudėtingesnių ir ilgiausiai trukusių Skaičiavimo metodų sektoriaus ūkiskaitinių darbų. Užsakovas – Vilniaus Radijo matavimo prietaisų mokslo tyrimo institutas. Šis taikomasis darbas stimuliavo sektoriuje teorinius tyrimus (žr. 4.2 skyrelį). Matematine prasme tai diferencialinių operatorių tikrinių reikšmių uždavinys.

Vienas iš konkrečių šio darbo uždavinių yra toks: Duoto geometrinio pavidalo bangolaidžiui reikia parinkti geometrinių parametrų reikšmes taip, kad būtų išpildytas tam tikras kriterijus, formuluojamas per tikrinių reikšmių skaitinius dydžius. Vienas iš sunkesnių ir matematiškai įdomesnių uždavinių buvo lunaro pavidalo bangolaidžio tikrinių reikšmių radimas. Lunaras (arba mėnulio, tiksliau pusmėnulio pavidalo geometrinė figūra) gali būti apibrėžtas taip. Imame du skirtingų diametrų skritulius, vieną esantį kito viduje, išdėstytus ekscentriškai (centrai nesutampa). Išmetus mažojo skritulio apribotą plotą, gauname nevienodo pločio žiedą. Siauriausioje žiedo vietoje iškirpus (pagal centrinį kampą) siaurą juostelę, gauname stilizuotą raidę C arba stilizuotą mėnulio formą (priešpilnio ar delčios fazėje).



Reikia parinkti lunaro geometrines išmieras (diametrų santykį, žiedo plotį siauriausioje vietoje ir centrinį kampą) taip, kad skirtumas $\lambda_4 - \lambda_3$ būtų mažiausias; čia λ_3 ir λ_4 - trečioji ir ketvirtoji pagal dydį tikrinės reikšmės:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq ...$$

Prieš padengiant lunaro sritį tinklu, buvo atliekamas lunaro konforminis atvaizdavimas į stačiakampį.

Suradus diferencialinio uždavinio tikrines reikšmes (bangolaidžio kritinius dažnius), buvo formuluojami įvairūs procesų bangoliadžiuose tyrimo uždaviniai.

Pagrindiniai vykdytojai: D. Sapagovienė, T. Veidaitė, M. Sapagovas

Literatūra: [23, 55, 56, 68, 70, 83].

5.4.Minimalūs paviršiai architektūroje. Praeito amžiaus septintame dešimtmetyje didelių visuomeninės paskirties pastatų (parodų paviljonai, stadionai, areousto pastatai, sporto salės) perdengimus keletas pasaulio architektų pradėjo projektuoti atsižvelgdami į minimalių paviršių principus. Neskaitant keleto techniškai ar ekonomiškai prasmingų minimalių paviršių privalumų: mažiausias medžiagų sunaudojimas, vienodi paviršiaus įtempimai, optimalus atsparumas apkrovoms (sniegui, vėjui), esminė to priežastis buvo estetika – minimalūs paviršiai atrodo estetiškai.

Ryškiausi tokių perdengimų pavyzdžiai: Vokietijos (VFR) paviljonas pasaulinėje parodoje Expo-67 (1967m.) ir Miuncheno olimpinis stadionas (1972m.), abiejų statinių architektas Otto

Frei; restoranai Meksikoje ir Ispanijoje (architektas Felix Candela); JAV paviljonas tarptautinėje parodoje (Osaka, 1970). Ir dėl egzotikos – mūsų tėvynainės žinomos architektės Aleksandros Kašiubienės (Kasuba) suprojektuotas gyvenamasis namas sau (JAV,New Mexico, 2003-2005).

Apie 1965-1966 metus minimaliųjų paviršių perdangomis susidomėjo Kijevo statybos inžinerijos instituto architektai ir inžinieriai. Tačiau jiems reikėjo pagalbos sprendžiant minimalaus paviršiaus lygtį. Tarp kitko, architektui O. Frei minimalaus paviršiaus lygtį sprendė žinomas to meto skaičiavimo matematikos specialistas J. H. Argyris (Didžioji Britanija), vienas iš baigtinių elementų metodo pirmtakų. Kijevo statybos inžinerijos instituto atstovai kreipėsi pagalbos į Ukrainos MA Matematikos institutą. Matematikos institute iki 1965 m. aspirantūroje mokėsi M. Sapagovas, ir Kijevo matematikai patarė inžinieriams važiuoti į Vilnių.

Taip prasidėjo apie 5 metus trukęs mokslinis bendradarbiavimas su Kijevo inžinieriais, taikant diferencialines lygtis projektavime. Kijeve inžinieriai sukurdavo vis naujas perdengimų kontūro formas (matematiškai – diferencialinei lygčiai apibrėždavo sritį ir kraštines sąlygas). Vilniuje buvo sprendžiama su ESM minimalaus paviršiaus lygtis pagal M. Sapagovo algoritmus ir G. Kairytės programas. Taip buvo išspręsta daug konkrečių variantų, taip buvo paruošta daug galimų perdengimų. Pagal vieną projektą Ukrainoje Renijsko uoste prie Dunojaus, uždaroje uosto pasienio teritorijoje buvo pastatytas pastatas su minimalaus paviršiaus formos perdanga.

Dabar praėjus daugeliui metų, galima drąsiai teigti, kad Kijevo architektai ir inžinieriai buvo susipažinę su O.Frei ir F. Candela darbais ir bandė atkartoti ar patobulinti jų idėjas.

Pagrindiniai vykdytojai: G. Kairytė, M. Sapagovas.

Literatūra: [3, 5, 6, 10, 15, 36, 71, 75].

5.5.Kalbos atpažinimas ir sintezė. Fizikos ir matematikos instituto Atpažinimo procesų sektoriaus (vadovas L. Telksnys) mokslininkai septintojo dešimtmečio pradžioje turėjo keletą ūkiskaitinių sutarčių su užsakovu – Leningrado Tolimųjų ryšių mokslo tyrimo institutu kalbos atpažinimo ir sintezės klausimais. Po kelių metų užsakovas kreipėsi ir į Skaičiavimo metodų sektorių su pasiūlymu išbandyti su ESM keletą kalbos sintezės modelių, aprašomų diferencialinėmis lygtimis.

Pirmame etape akustinio signalo modeliavimui buvo taikoma paprastųjų diferencialinių lygčių sistema, aprašanti tam tikras elektrines schemas. Vėliau šis modelis buvo pakeistas kitu. Artikuliacinis traktas buvo modeliuojamas kaip dujų dinamikos procesas kintamojo skerspjūvio kanale.

Buvo sukurtas šio matematinio modelio sprendimo algoritmas, sudarytos kelios programos, pagal kurias galima apskaičiuoti garso bangos spektrines charakteristikas (rezonansinius dažnius). Buvo eksperimentuojama, kaip priklauso modeliuojamo proceso stabilumas nuo kanalo formos pakitimų. Užsakovo tvirtinimu, pagal skaičiavimų rezultatus bus kuriami eksperimentiniai kalbos sintezės prietaisai.

Pagrindiniai vykdytojai: G. Kairytė, M. Sapagovas, Z. Vasiliauskas, T. Veidaitė.

Literatūra: [21, 72, 73, 77, 82].

5.6. Skysto elektrografinio ryškalo tyrimas. Dvejus metus buvo vykdoma ūkiskaitinė sutartis su Vilniaus Elektrografijos mokslo tyrimo institutu. Matematinis uždavinio formulavimas – išspręsti integrodiferencialinę lygtį. Buvo sudarytas skaičiavimo metodas šiam uždaviniui spręsti. Sudarytas ir užsakovui perduotas programų komplektas.

Pagrindinis vykdytojas G. Kairytė.

Literatūra: [87].

5.7. Spalvotų kineskopų magnetinių laukų matematinis modeliavimas. Buvo sprendžiamos diferencialinės lygtys, aprašančios elektroninių – optinių sistemų magnetinių laukų charakteristikas.

Pagrindinis vykdytojas: V. Kleiza.

Literatūra: [47, 48, 50, 51, 53].

5.8. Vilniaus skaičiavimo mašinų SKB projektuojamos ESM RŪTA-110 programinė įranga ir skaitančio automato RŪTA-701 darbo modeliavimas. Keletą metų Skaičiavimo metodų sektoriaus darbuotojai kartu su kitų instituto padalinių darbuotojais kūrė ir derino programas skaičiavimo mašinai RŪTA-110. 1968 m. apiforminta ir priduota Valstybinei komisijai apie 30 programų iš jų:

- veiksmų su matricomis programos,

- matricos tikrinių reikšmių radimo programos,
- elementariųjų funkcijų skaičiavimo programos,
- funkcijų ekstremumų radimo programos,

Užsakovui pageidaujant pastoviai buvo sudaromos programos skaičiavimo mašinai BESM-2M modeliuoti skaitančio automato RŪTA-701 darbą. Vienas didesnių darbų – programa modeliuoti ir statistiškai patikrinti naujos konstrukcijos skaitančio automato ženklų atpažinimą, priklausomai nuo ženklo storio ir postūmio.

Pagrindiniai vykdytojai: T. Veidaitė.

Literatūra: [71, 74, 75, 76, 85].

<u>5.9. Elektrokontaktai iš skysto metalo (gyvsidabrio).</u> 1976 metais akademiko Kazimiero Ragulskio iniciatyva pradėti bendri moksliniai tyrimai su KPI Vibrotecnikos laboratorija, nagrinėjant gyvsidabrio lašo laisvojo paviršiaus formą. Tipinis paprasčiausias uždavinio formulavimas yra toks

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{du}{dr}\right)^2}}\frac{du}{dr}\right)-Ku+\lambda=0,$$

$$u'(0)=0, \quad u(a)=0,$$

$$2\pi\int_0^a rudr = V;$$

čia K, a - žinomos konstantos, nežinomieji yra funkcija $u(r)$ ir parametras λ.

Taip Skaičiavimo metodų sektoriuje prasidėjo diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis tyrimai ir sprendimas. Ši tematika labai intensyviai nagrinėjama daugelyje pasaulio šalių. Ši tematika tapo pagrindine skaičiavimo metodų sektoriaus tematika sekančius dešimtmečius (pradedant 1976 m.).

6. Post Scriptum

Šiame straipsnyje aprašyta, kaip Lietuvos MA Fizikos ir matematikos institute prasidėjo diferencialinių lygčių skaitinių metodų tyrimai. Šios dienos požiūriu kritiškai apžvelgta, kas buvo nuveikta per pirmąjį dešimtmetį (1967-1976). Vėliau po 1976 metų ir institute ir

Skaičiavimo metodų sektoriuje buvo keletas reformų. 1977 metais institutas suskilo į du atskirus institutus – Matematikos ir kibernetikos bei Fizikos institutus. 1990 metais Matematikos ir kibernetikos institutas pakeitė pavadinimą į Matematikos ir Informatikos institutą, o 1991 metais tapo ne Mokslų akademijos, o Valstybiniu institutu. Vėliau 2010 metais institutas buvo prijungtas prie Vilniaus universiteto. 2018 metais po VU Matematikos ir informatikos fakulteto reorganizavimo Matematikos ir informatikos institutas tapo fakulteto dalimi ir pavadintas Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutu. Skaičiavimo metodų sektoriaus naujoje struktūroje nėra. Skaitinių metodų moksliniai tyrimai tęsiasi instituto Tikimybių ir statistikos grupėje.

Skaičiavimo metodų skyrius (iki 1980 m. Skaičiavimo metodų sektorius) egzistavo lygiai 51 metus (nuo 1967-01-01 iki 2017-12-31),

Per 51 metus:

- 9 skyriaus darbuotojai apgynė daktaro (iki 1991 kandidato) disertacijas (V. Kleiza, 1973, vad. M. Sapagovas; D. Sapagovienė, 1976, vad. B. Kvedaras; R. Skirmantas, 1982, vad. M. Sapagovas, R. Čiegis, 1985, vad. M. Sapagovas; V. Būda, 1987, vad. M. Sapagovas; A. Štikonas, 1990, vad. akad. N.Bachvalovas; S. Norvaišas, 1990, vad. R. Čiegis; O. Štikonienė, 1997, vad. R. Čiegis; A. Skučaitė, 2016, vad. A. Štikonas);
- Skyriuje doktorantūroje mokėsi ir disertacijas apgynė dar 8 skaitinių metodų specialistai ne skyriaus darbuotojai (S. Bekešienė, 1998, vad. V. Kleiza; R. Šiugždaitė, 2006, vad. S. Norvaišas; Ž. Jesevičiūtė, 2010, vad. M. Sapagovas; S. Roman, 2011, vad. A. Štikonas; K. Jakubėlienė, 2013, vad. M. Sapagovas; J. Jachimavičienė, 2013, vad. M. Sapagovas; M. Mackevičius, 2013, vad. F. Ivanauskas; K. Bingelė, 2019, vad. A. Štikonas);
- 4 skyriaus darbuotojai tapo habilituotais daktarais (M. Sapagovas, 1986; R. Čiegis, 1993; V. Kleiza, HP, 2001; A. Štikonas, HP, 2008);
- M. Sapagovas ir R. Čiegis (VGTU) išrinkti Lietuvos MA nariais;
- Skyriaus darbuotojai 2 kartus gavo Lietuvos Valstybinę mokslo premiją (1995 m. R. Čiegis, M. Sapagovas su F. Ivanausku (VU); 2017 m. M. Sapagovas, A. Štikonas su R. Čiegiu (VGTU));

- 4 skyriaus darbuotojai perėjo dirbti į Lietuvos aukštąsias mokyklas fakultetų dekanais ar katedrų vedėjais (R. Čiegis, VGTU; V. Kleiza, KTU; S. Norvaišas MRU; V. Būda, ISM);
- A. Štikonas ir O. Štikonienė yra VU profesoriai;
- Skaičiavimo metodų skyriaus ir VU MIF pradėtas leisti 1997 m. žurnalas „Nonlinear Analysis: Modelling and Control"priklauso prestižiniams pasaulio žurnalams ir turi vieną didžiausių reitingų tarp Lietuvos mokslinių žurnalų;
- M. Sapagovas 2002 m. išrinktas ECMI garbės nariu (European Consortium for Mathematics in Industry).

Literatūra

FMI Skaičiavimo metodų sektoriaus darbuotojų mokslinės publikacijos (straipsniai ir tezės) 1966-1976 metai

1. M. Sapagovas, Netiesinių tamprumo ir ptastiškumo teorijos uždavinių artutinis sprendimo metodas . Lietuvos Matematikos Rinkinys, 6, Nr. 4, p.626-627

2. B. Kvedaras, D. Levinskaitė, M. Sapagovas,D.S apagovienė, Membranos svyravimų nuosavų dažnių radimas, naudojant ESM. Lietuvos Matematikos Rinkinys,6, Nr.4, p.627-628

3. A. Agalcev, M. Sapagovas, Minimalaus paviršiaus taškinis karkasas stačiakampiame plane. Mežvuzovskaja Pespublikanskaja konferencija po stpoitelstvu,stroitelnym materialam i architekture Kiev, 1967, p.117-118.

4. A. Agalcev, M.S apagovas, Minimalaus paviršiaus lygties sprendimas baigtinių skirtumų metodu. Lietuvos Matematikos Rinkinys,1967, 7, Nr.3, p.373-379.

5. A. Agalcev, M. Sapagovas, Minimalių paviršių su standžiu kontūru vaizdavimas. Naučno-metodičeskaja konferencija po prikladnoj geomtrii i inženernoj grafiki(kpatkie soderžanija i tezisy dokladov), Kazanj.1967, p.14.

6. A. Agalcev, M. Sapagovas, Kai kurių minimalių paviršių tentiniams perdengimams skleidimas Naučno-metodičeskaja konferencija po prikladnoj geomtrii i inženernoj grafiki(kpatkie soderžanija i tezisy dokladov), Kazanj.1967, p.37-38.

7. G. Kairytė, M. Sapagovas,Minimalaus paviršiaus lygties sprendimo naudojan BESM-2M patirtis. Matematika, Fizika,Kibernetika (Jaunųjų mokslininkų konferencija, Vilnius,1967 gruodžio 6-8), p.60-61.

8. A. Agalcev, G. Kairytė, M. Sapagovas, Minimalaus paviršiaus karkaso stačiakampiame plane sudarymas naudojant ESM. Prikladnaja Geometrija i Inženernaja Grafika, Kiev, 1968, 7, p.86-94.

9. M. Sapagovas, Kai kurių netiesinės kietojo kūno mechanikos uždavinių sprendimas baigtinių skirtumų metodu. Tretij vsesojuznyj sjezd po teoretičeskoj i prikladnoj mechaniki (Annotacii dokladov), Maskva, 1968, p.268-269.

10. A. Agalcev, M. Sapagovas, Minimalaus paviršiaus taškinis karkasas skritulio plane. Prikladnaja Geometrija I Inženernaja Grafika, Kiev,1968, 7,p.93-98.

11. V. Keras, M. Sapagovas, A. Šuminas, Necentruotai apkrautos elastingos sienelės su įtrūkimais įtempimų klausimu. Tezisy dokladov k respublikanskoj naučno-techničeskoj konferenci, 1969, 9,9i,Brest, 1968, P.71-72.

12. A. Andrėnas, J. Juknevičiūtė, V. Keras, M. Sapagovas, Pakartotinio M.Gibšmano koeficientų skaičiavimo V.Šamanskio metodu klausimo. Respublikinės 19-osios KPI konferencijos Darbai.Statyba ir Architektūra,Kaunas, 1969, p.146-148.

13. M. Sapagovas,Iteracinių metodų konvergavimo pagreitinimo klausimu. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1969, 9, Nr.2, p.395

14. G. Kairytė, M. Rozenbliumas, ESM panaudojimas gelžbetoninių sijų-sienelių tyrimui. Gelžbetoninės Konstrukcijos (Visi darbai), Vilnius,1970, Nr.3, p.75-81.

15.A. Agalcev, M. Sapagovas, Minimalaus paviršiaus taškinio karkaso skaičiavimas Cilindrinėse koordinatėse. Prikladnaja Geometrija i Inženernaja Grafika, Kiev, 1970, 10, p.53-56.

16. V. Keras, M. Sapagovas, A. Šuminas, Magistralinio plyšio sklidimo stačiakampėje plokštėje, gniuždomoje kraštinėmis lokaliomis apkrovomis, įtempimų kinetika.Tezisy dokladov II konferencii po čislennym metodam rešenija zadač teorii uprugosti i plastičnosti (Trakai} , Vilnius,1971, p.15-16.

17. A. Andrėnas, M. Sapagovas, Tamprumo teorijos plokščiojo uždavinio skaitinis sprendimas blokiniu viršutinės relaksacijos metodu. Trudy konferencii po čislennym metodam rešenija zadač teorii uprugosti i plastičnosti,Novosibirsk, 1971, p.25-33

18. V. Keras, M. Sapagovas, A. Šuminas, Magistralinio plyšio sklidimo stačiakampėje plokštėje, gniuždomoje kraštinėmis lokaliomis apkrovomis, įtempimų kinetika. Trudy

konferencii po čislennym metodam rešenija zadač teorii uprugosti i plastičnosti,Novosibirsk, 1971, p.142-155.

19. M. Sapagovas, Duotojo vidutinio kreivumo paviršiaus lygties artutinis sprendimas ir taikymas. Tezisy vsesojuznoj konferencini "Mechanika splošnojsredy i smežnye problemy matematičeskogo analiza"),Tbilisi, 1971, p.41.

20. B. Kvedaras, M. Sapagovas, Darbai iš diferencialinių ir integralinių lygčių sprendimo srities, atliekami Lietuvos MA Fizikos ir Matematikos instituto Skaičiavimo centre. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, Vilnius, Leidinys Nr.1 p.11-37.

21. Z. Vasiliauskas, M. Sapagovas, Paprastųjų diferencialinių lygčių specialios sistemos skaitinis sprendimo metodas Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, Vilnius, Leidinys Nr.1 p.57-62.

22. D. Sapagovienė, Kritinių dažnių apskaičiavimas elipsinio, ekscentriško žiedo ir mėnulio pavidalo bangolaidžiams. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, Vilnius, Leidinys Nr.1 p.63-72.

23. S. Šulika, D. Sapagovienė, Bangos H01 keitiklio į H20 stačiakampiame bangolaidyje optimalių išmierų Parinkimo klausimu. Voprosy Radioelektroniki, Serija „Radioizmeritelnaja technika", 1971 Nr.2, p.103-106.

24. V. Kleiza, Monte-Karlo metodas netiesinių lygčių sistemai spręsti. Metody Monte-Karlo i ich primenenie (Tezisy dokladov 3—ei Vsesojuznoj konferencini, Novosibirsk, 1971.

25. D. Sapagovienė, Laplaso operatoriaus tikrinių reikšmių skaičiavimas. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1971, 11, Nr.4, p.875-862.

26. M. Sapagovas, O. Ūdrienė, Netiesinės parabolinės lygties, sutinkamos jūros fizikoje, sprendimas. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1972,12,Nr.2, p.172-173.

27. V. Kleiza, Apie Monte- Karlo metodo taikomumo netiesinių lygčių sistemai spręsti pakankamąsias sąlygas. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1972, 12, Nr.2, p.57-63.

28. V. Kleiza, Netiesinių lygčių sistemų sprendimas Monte-Karlo metodu. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1972,12, Nr.2,p.168-169.

29. V. Kleiza, Netiesinių skirtuminių lygčių sprendimas Monte-Karlo metodu. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1973, leidinys Nr.3, p.51-67.

30. M. Sapagovas, Pseudoišsprendžiamos skirtuminės schemos. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1973, leidinys Nr.3, p.68-85.

31.D. Sapagovienė, Aukštesnio tikslumo skirtuminės schemos homogeninei Helmgolcio lygčiai. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1973, leidinys Nr.3, p86-95.

32. M. Sapagovas, Kvazitiesinių elipsinių lygčių apytikslių sprendimo metodų trumpa apžvalga ir bibliografija. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1973, leidinys Nr.6, p.60-128.

33.V. Kleiza, Monte-Karlo metodo paklaidos įvertis, sprendžiant netiesinių lygčių sistemas, Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1973, 13 Nr.1, p.79-86.

34. M. Sapagovas, Skirtuminės Gryno funkcijos įvertis kai kurioms elipsinėms Lygtims. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1973, 13 Nr.1.p.189-198.

35. A. Kazragis, M. Sapagovas, E. Surotkevičius, Kationų su dviem ir aštuoniais elektronais spindulių dydžių pokyčių dėsningumų tyrimas. Chemija ir cheminė technologija, 1973, 15, p.119-131.

36. A. Agalcev, M. Sapagovas, Minimalaus paviršiaus taškinio karkaso radimas, naudojant taisyklingą trikampį tinklelį. Prikladnaja Geometrija i Inženernaja Grafika, Kiev, 1973, 16, p.54-56.

37. M. Sapagovas, Padidinto tikslumo skirtuminių schemų sudarymas kvazitiesinėms elipsinėms lygtims. I.Netiesinių lygčių išsprendžiamumo sąvokos praplėtimas. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1973, 13, Nr.4, p.161-172.

38. M. Sapagovas, Padidinto tikslumo skirtuminių schemų netiesinės mechanikos lygtims paklaidos įvertis. Trudy tretei vsesojuznoj konferencini po čislennym metodam rešenija zadač teorini uprugosti i plastičnosti, č.2, Novosibirsk, 1974, p.109-117.

39. M. Sapagovas, Padidinto tikslumo variacinių-skirtuminių schemų sudarymas kvazitiesinėms elipsinėms Lygtims. Variacionno-raznostnye metody v matematičeskoj fizike, Novosibirsk, 1974, p.126-136.

40. M. Sapagovas, Padidinto tikslumo skirtuminė schema trečiajam kraštiniam uždaviniui, Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1974,Leidinys Nr,7, p.37-50.

41. D. Sapagovienė, Šeštosios eilės tikslumo skirtuminė schema Laplaso operatoriaus tikrinėms reikšmėms rasti. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1974, Leidinys Nr.7, p.51-65.

42. D. Sapagovienė, Padidinto yikslumo skirtuminės schemos kai kurių diferencialinių operarorių tikrinėms reikšmėms rasti. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1974,Leidinys Nr,7, p.67-76.

43. B. Kvedaras, M. Sapagovas, Skaičiavimo metodai. Vadovėlis universitetams, Vilnius, „Mintis“, 1974,p.516.
44 V. Kleiza, Monte-Karlo metodo algoritmas netiesinei diferencialinei lygčiai spręsti. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1974, Leidinys Nr 7, p.20-25.
45. V. Kleiza, Netiesinių lygčių sistemų šaknų lokalizavimas Monte-Karlo metodu. Metody Monte-Karlo v vyčislitelnoj matematiki i matematičeskoj fizike,Novosibirsk, 1974,p.
46. V. Kleiza, Monte-Karlo metodo tikimybinės paklaidos įverčio klausimu. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1974,Leidinys Nr,10, p.54-65.
47. V. Kleiza ir kt., Spalvotų kineskopų toroidalinės nukrypimo sistemos magnetinio lauko matematinio modeliavimo rezultatai.Radioelektronika, Kaunas, 1975, p.114-115.
48. V. Kleiza ir kt., Spalvotų kineskopų elektroninių-optinių parametrų matavimų ir mašininio skaičiavimo rezultatai. Radioelektronika, Kaunas, 1975, p.113-114.
49. V. Kleiza, Markovo grandinių netiesinių sekų modeliavimo klausimu. Lietuvos Matematikos Rinkinys. 1975, 15, Nr.4.
50. V. Kleiza ir kt., Matavimo skaičiaus mažinimas, modeliuojant magnetinį lauką. Radioizmerenija. Materialy 6-oi naučno-techničeckoi konferencii, t.4,Kaunas,1975, p.143-149.
51. V. Kleiza ir kt., Vertikalaus nukrypimo įrenginių parametrų skaičiavimas. Materialy 6-oi naučno-techničeckoi konferencii, t.4,Kaunas,1975, p.154-162.
52. V. Kleiza, Atvirkštinių funkcijų asimptotinis išreiškimas. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1975,13 p.51-60.
53.V. Kleiza, J. Kleiza, Magnetinio lauko, atsirandančioelektroninėje optinėje sistemoje, radimo uždavinio matematinis formulavimas. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1975,13 p.61-70.
54. M. Sapagovas, Padidinto tikslumo skirtuminės schemos kvazitiesinėms parabolinėms lygtims. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1975,13 p.71-82.
55. T. Veidaite, P. Nikolaev, S. Šulika, Atsitiktinių dydžių pasiskirstymo Gramo-Šarlje eilute aproksimavimo tikslumo įvertis. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1975,15, Nr.2,p.181-183.
56. T. Veidaitė, P. Nikolaev, S. Šulika, Daugiamačio lauko keitiklio perdavimo koeficiento pasiskirstymo funkcijos skaitinių charakteristikų skaičiavimas. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1975, 15, Nr.2, p.183-184.

57. G. Gančo, G. Kairytė, E. Mockus, Apkrautų dalelių trajektorijų elektroforezinių ir dielektroforezinių jėgų laukuose diferencialinių lygčiųsprendimas. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1975, 15, Nr.2, p.186-187.

58. M. Sapagovas, Iteracinio proceso minimalaus paviršiaus lygčiai konvergavimo klausimu. . Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1975, 15, Nr.2, p.178-179.

59. M. Sapagovas, Padidinto tikslumo skirtuminių schemų sudarymas kvazitiesinėms elipsinėms lygtims.II.Vienamatis atvejis. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1975, 15, Nr.2, p.103-125.

60. M. Sapagovas, Testas netiesinių tamprumo ir plastiškumo uždavinių sprendimui. Čislennye metody mechaniki splošnoi sredy. Novosibirsk,1975, 6,Nr.2,p.117-119.

61. Z. Vasiliauskas, Signorini uždavinio artutinio variacinio-skirtuminio sprendinio konvergavimo klausimu. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1975, 13, p.9-25.

62. V. Kleiza, Atvirkštinių funkcijų skaičiavimas Monte-Karlo metodu. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1976, 16, Nr.2, p.117-120.

63. V. Kleiza, Netiesinės lygties sprendinio funkcionalų skaičiavimas Monte-Karlo metodu. Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1976, 16, Nr.2, p.227.

64. V. Kleiza ir kt., Metalinių plėvelių augimo kinetikos tyrimas. Fizikinė Elektronika, Vilnius,1976 II d. p. 33-34.

65. V. Kleiza, Funkcionalinių lygčių sprendimas Monte-Karlo metodu . Lietuvos Matematikos Rinkinys, 1976, 16, Nr.4, p.127-131.

66. M. Sapagovas, Stacionarių netiesinių tamprumo ir plastiškumo teorijos uždavinių kai kurių sprendimo metodų skaitinis palyginimas. Čislennye metody mechaniki splošnoi sredy. Novosibirsk,1976,76,Nr.5,p.125-136.

67. S. Grinevičius,V. Kleiza, Monte-Karlo metodo algoritmas uždaviniui apie neišreikštines funkcijas spręsti ir tirti. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1976, 15, p.9-17.

68. D. Sapagovienė, Netiesinio algebrinio tikrinių reikšmių uždavinio stabilumas. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1976,15, p.25-35.

69. M. Sapagovas, Pseudoišsprendžiamos padidinto tikslumo skirtuminės schemos netiesinėms lygtims spręsti esant netolygiam tinklui Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1976, 16, p.61-85.

70. D. Sapagovienė, Šturmo seka netiesiniam tikrinių reikšmių uždaviniui. Diferencialinės lygtys ir jų taikymas, 1976, 16, p. 87-94.

Programos įtrauktos į Respublikinį algoritmų ir programų fondą

71. G. Kairytė, ESM BESM-2M programa minimalaus paviršiaus lygčiai spręsti nestačiakampėje srityje, 1969, 24 psl. П 000 002(2).

72. G. Kairytė, Akustinio signalo rezonansinių dažnių skaičiavimas, neįskaitant nuostolių, 1970, 23 psl. П 000 018(5).

73. G. Kairytė, Akustinio kalbinio signalo skaičiavimo programa, 1970, 29 psl. П 000 019(6).

74. T. Veidaitė, ESM BESM-2M koreliacijos koeficiento skaičiavimo standartinė programa, 1967, 8 psl. П 000 094(19).

75. G. Kairytė, ESM BESM-2M minimalaus paviršiaus lygties sprendimo nestačiakampėje srityje programa, 1967, 29 psl. П 000 095(20).

76. G. Kairytė, ESM BESM-2M biharmoninės lygties sprendimo programa, 1967, 32 psl. П 000 097(22).

77. T. Veidaitė, Kalbinio trakto perdavimo funkcijos polių skaičiavimo programa, 1970, 34 psl. П 000 235(37).

78. J. Povilaitytė, Plokščio ekrano standaus laisvos formos stūmoklio sukuriamo mechaninio impedanso skaičiavimo programa, 1971, 19 psl. П 000 155(28).

79. J. Povilaitytė, Apvalaus stūmoklio, esančio sferoje, sukurto slėgio lauko skaičiavimo programa, 1971, 22psl. П 000 156(29).

80. J. Povilaitytė, Plokščio ekrano laisvos formos stūmoklio sukuriamo garsinio lauko skaičiavimo programa (II atvejis), 1971, 14psl. П 000 180(33).

81. J. Povilaitytė, Plokščio ekrano laisvos formos stūmoklio sukuriamo garsinio lauko skaičiavimo programa (I atvejis), 1971, 14psl. П 00 181(34).

82. A. Valiulienė, Artikuliacinio trakto ploto funkcijos skaičiavimas, 1972, 20psl. П 000 347(44).

83. T. Veidaitė, Bangolaidžių perėjimo atspindžio koeficiento modulio skaičiavimo programa, 1974, П 000 462.

84. G. Stasinienė, Dendrochronologinių darinių verifikavimas artėjimo metodu, 1974, П 000 511.

85. T. Veidaitė, Kompleksinės Ermito matricos tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių radimas Jakobio metodu, 1974, П 000 646.
86. T. Veidaitė, Gramo – Šarlje eilutės kvantilių skaičiavimas nepriklausomų atsitiktinių dydžių visumai, 1975.
87. G. Kairytė, Elektofotografinių vaizdų ryškinimo, atsižvelgiant į paviršinio krūvio kondensacijų, kinetikos integrodiferencialinės lygties sprendimo programa, 1975.

Lietuvos matematikos istorija, knygos

88. J. Banionis, Matematikos mokslo raida Lietuvoje 1920 – 1940, Vilnius, 1994.
89. J. Banionis, Matematinės minties raida Lietuvoje. Nuo matematikos žinių atsiradimo iki matematikos mokslo įsitvirtinimo, Vilnius, LEU, 2014.
90. K. Kubilius, Matematika Lietuvos aukštosiose mokyklose 1921 – 1944 metais. Iš Lietuvos matematikos istorijos, 4, Vilnius, VU, 2015.
91. Lietuvos universiteto, Vytauto Didžiojo universiteto, Vilniaus universiteto fizikos, matematikos, mechanikos, informatikos ir statistikos absolventai, 1922 – 2009. Sudarytojai. H. Jasiūnas, V. Stakėnas, V. Verikaitė, Vilnius, VU, 2010.
92. Matematika Lietuvoje po 1945 metų. Iš Lietuvos matematikos istorijos, 2, Vilnius, M11, 2006.
93. B. Riauba. N. Vasiliauskaitė, Senojo Vilniaus universiteto matematikos istorija, Vilnius, VU, 2012.
94. M. Sapagovas, G. Dzemyda, S. Rutkauskas, A. Žandaris, D. Daugaravičienė, Matematikos ir informatikos institutas, Vilnius, MII, 2006.
95. Vilniaus universiteto istorija, 1940 – 1979, A. Bendžius (ats. red.) Vilnius, Mokslas, 1979.

Lietuvos matematikos istorija, straipsniai

96. A. Bikelis, E. Manstavičius, Matematika. Moksliniai tyrimai pagal mokslų šakas. Knygoje [95], psl. 197-207.
97. F. Ivanauskas, M. Sapagovas, Skaičiavimo matematika. Knygoje [92]. Psl. 284-296.
98. J. Kubilius. Kaip mokslų akademijoje atsirado matematika. Knygoje [92], psl. 9-23.
99. E. Manstavičius, V. Pekarskas, M. Sapagovas. Profesorius Jonas Kubilius ir Lietuvos matematikos istorija. Knygoje [90], psl. 179-186.
100. S. Rutkauskas. Matematikos ir informatikos instituto penkiasdešimties metų istorijos broužai. Knygoje [94], psl. 12-39.

101. S. Skėrus. Matematika Lietuvos mokslų akademijoje. Lietuvos mokslas, t.1, kn. 1, psl. 78-92.

Mifodijus Sapagovas. Skaičiavimo metodų moksliniai tyrimai Lietuvos Mokslų akademijos Fizikos ir matematikos institute (1961-1976). Apžvalga. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas. Vilnius, 2022, p.35.

Straipsnyje apžvelgta, kaip Lietuvos Mokslų akademijoje atsirado skaičiavimo metodų moksliniai tyrimai. Aprašyta Fizikos ir matematikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus pagrindinė mokslinių tyrimų tematika – netiesinių elipsinių lygčių sprendimas baigtinių skirtumų metodu. Būdingas mokslinių tyrimų bruožas – tamprus teorinių tyrimų ryšis su taikomųjų uždavinių sprendimu. Išanalizuoti pagrindiniai moksliniai rezultatai ir taikomieji uždaviniai (minimaliųjų paviršių taikymai architektūroje, procesų bangolaidžiuose tyrimai ir bangolaidžių parametrų optimizavimas, požeminių vandens eksploatacinių atsargų prognozavimas, statybinių konstrukcijų atsparumas ir medžiagų įrimo kinetika, kalbos atpažinimas ir sintezė, spalvotų kineskopų magnetinių laukų matematinis modeliavimas).

FMI Skaičiavimo metodų skyriuje 1976 metais pradėti diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis sąlygomis pirmieji moksliniai tyrimai Lietuvoje.

Bibliografija – 101 pavadinimas

Mifodijus Sapagovas. Research in the field of numerical analysis in the Institute of Physics and Mathematics of the Lithuanian Academy of Sciences (1961-1976). Technical report. Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Institute of Data Science and Digital Technologies, Vilnius, 2022, p.35 (In Lithuanian).

The article reviews how research on numerical analysis has emerged in the Lithuanian Academy of Sciences. Yhe main topics of the Numerical Analysis Departament are dascribed – nmerical methods for solving nonlineae ellipticc equations, their theoretical investigation and application for the solution of concrete problems. Specific applied problems solved in the Departament duringthe first decade of activities are presented.These are minimal surfaces in architedture, forecasting of groundwater rezerves, investigation of processes in waveguides , modaling of magnetic fields in optical systems etc.

The first rssearch in Lithuania on numerical methods for differential equations with nonlocal conditions was begun in the DEPARTAMENT OF Numerical Analysis of The Institute of Physics and Mathematics.

Bibliography – 101.